

**GUIA DE ESTUDIO: CALCULOS DE DERIVADAS:**

1. $y = \frac{\sin x}{x^2}$ Solución: $y' = \frac{\cos x \cdot x^2 - \sin x \cdot 2x}{x^4} = \frac{\cos x \cdot x - 2 \sin x}{x^3}$

2. a) $y = \frac{3^{5x}}{2x-1}$

b) $y = 3^x \cdot \cos(x^2 - 1)$

$(3^{5x} \cdot \ln 3 \cdot 5 \cdot (2x-1) - 3^{5x} \cdot 2) / (2x-1)^2$

Solución:

a) $y' = \frac{5 \cdot 3^{5x} \cdot \ln 3 (2x-1) - 2 \cdot 3^{5x}}{(2x-1)^2} = \frac{3^{5x} \cdot [5(2x-1) \cdot \ln 3 - 2]}{(2x-1)^2}$

b) $y' = 3^x \cdot \ln 3 \cdot \cos(x^2 - 1) - 3^x \cdot \sin(x^2 - 1) \cdot 2x =$
 $= 3^x \cdot [\ln 3 \cdot \cos(x^2 - 1) - 2x \cdot \sin(x^2 - 1)]$

3. Calcula la derivada de la siguiente función implícita: $xy - 2x + 3y = 4$.

Solución:

$$y + xy' - 2 + 3y' = 0$$

$$y' \cdot (x+3) = 2-y \rightarrow y' = \frac{2-y}{x+3}$$

(*) → Halla la derivada de la siguiente función implícita: $x^3 + 6xy + y^3 = 8$.

Solución:

$$3x^2 + 6y + 6xy' + 3y^2 \cdot y' = 0$$

$$3y' \cdot (2x + y^2) = -3 \cdot (x^2 + 2y)$$

$$y' = \frac{-(x^2 + 2y)}{2x + y^2}$$

(*) 4. Dada la función implícita $x^2 - 3xy - 2y^2 = 4$, calcula su derivada.

Solución:

$$2x - (3y + 3xy') - (4y^2 \cdot y') = 0$$

$$2x - 3y - 3xy' - 4yy' = 0$$

$$2x - 3y = y' \cdot (3x + 4y)$$

$$y' = \frac{2x-3y}{3x+4y}$$

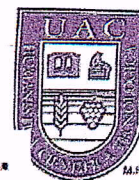
Halla y' sabiendo que: $x^2 + y^2 = x^2 \cdot y^2$.

Solución:

$$2x + 2yy' = 2xy^2 + 2x^2yy'$$

$$2yy' \cdot (1 - x^2) = 2x \cdot (y^2 - 1)$$

$$y' = \frac{x \cdot (y^2 - 1)}{y \cdot (1 - x^2)}$$



Calcula la derivada de la siguiente función implícita: $4x^2 + 9y^2 = 36$.

Solución:

$$8x + 18yy' = 0$$

$$y' = \frac{-8x}{18y}$$

5. Halla la ecuación de la tangente a la curva $y = \frac{x(2x+1)}{\sqrt{x+2}}$ en $x_0 = 2$

Solución:

- Ordenada en el punto: $y(2) = 5$

- Pendiente de la recta:

$$y = \frac{x(2x+1)}{\sqrt{x+2}} = \frac{2x^2+x}{\sqrt{x+2}}$$

Derivamos:

$$y' = \frac{(4x+1)\sqrt{x+2} - (2x^2+x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+2}}}{(x+2)} = \frac{(8x+2)(x+2) - (2x^2+x)}{2\sqrt{x+2}^3}$$

$$= \frac{8x^2 + 16x + 2x + 4 - 2x^2 - x}{2\sqrt{x+2}^3} = \frac{6x^2 + 17x + 4}{2\sqrt{x+2}^3}$$

$$y'(2) = \frac{31}{8}$$

- Ecuación de la recta tangente:

$$y = 5 + \frac{31}{8}(x-2) \rightarrow y = \frac{31}{8}x - \frac{11}{4}$$

6. Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ en el punto $(0, 4)$.

Solución:

- Comprobamos que la curva pasa por $(0, 4)$:

$$0^2 + 4^2 - 2 \cdot 0 - 4 \cdot 4 = 16 - 16 = 0$$

- Derivamos para obtener la pendiente de la recta:

$$2x + 2y \cdot y' - 2 - 4y' = 0$$

Despejamos y' :

$$y'(2y-4) = 2-2x \rightarrow y' = \frac{2-2x}{2y-4}$$

Por tanto:

$$y'(0, 4) = \frac{2-2 \cdot 0}{2 \cdot 4 - 4} = \frac{2}{8-4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

- Ecuación de la tangente:

$$y = 4 + \frac{1}{2}x$$



7. Obtén la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \frac{4x-2}{x(x^2+1)}$ en $x_0 = 1$

Solución:

– Ordenada en el punto: $y(1) = 1$

– Pendiente de la recta:

$$y = \frac{4x-2}{x(x^2+1)} = \frac{4x-2}{x^3+x}$$

Derivamos:

$$y' = \frac{4(x^3+x) - (4x-2) \cdot (3x^2+1)}{(x^3+x)^2} = \frac{4x^3+4x-12x^3-4x+6x^2+2}{(x^3+x)^2} = \frac{-8x^3+6x^2+2}{(x^3+x)^2}$$

$$y'(1) = 0$$

– Ecuación de la recta tangente: $y = 1$

8. Halla las rectas tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 6 = 0$ en $x_0 = 1$

Solución:

– Ordenadas en $x_0 = 1$:

$$1 + y^2 + 2 + 2y - 6 = 0 \rightarrow y^2 + 2y - 3 = 0$$

$$y = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \quad \begin{cases} y=1 \rightarrow \text{Punto } (1, 1) \\ y=-3 \rightarrow \text{Punto } (1, -3) \end{cases}$$

– Pendiente de las rectas tangentes:

$$\text{Derivamos: } 2x + 2y y' + 2 + 2y' = 0$$

Despejamos y' :

$$y'(2y+2) = -2x-2 \rightarrow y' = \frac{-2x-2}{2y+2} = \frac{-x-1}{y+1}$$

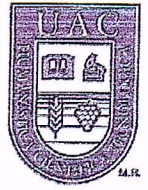
$$y'(1, 1) = \frac{-1-1}{1+1} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$y'(1, -3) = \frac{-1-1}{-3+1} = \frac{-2}{-2} = 1$$

Ecuaciones de las rectas tangentes:

$$\text{En el punto } (1, 1) \rightarrow y = 1 - (x - 1) \rightarrow y = -x + 2$$

$$\text{En el punto } (1, -3) \rightarrow y = -3 + (x - 1) \rightarrow y = x - 4$$



9. Dada la función $f(x) = x^2 e^{x^2-1}$, escribe la ecuación de su recta tangente en el punto de abscisa $x_0 = -1$.

Solución:

– Ordenada en el punto: $f(-1) = 1$

– Pendiente de la recta:

$$f'(x) = 2x \cdot e^{x^2-1} + x^2 \cdot e^{x^2-1} \cdot 2x = (2x + 2x^3) e^{x^2-1}$$

$$f'(-1) = -4$$

– Ecuación de la recta tangente:

$$y = 1 - 4(x + 1) \rightarrow y = -4x - 3$$