UNIVERSIDAD DE ACONCAGUA

GUIA DE ESTUDIO: CALCULOS DE DERIVADAS:

1.- $y=\frac{senx}{x^2}$ **Solución:** $y'=\frac{cosx\cdot x^2-senx\cdot 2x}{x^4}=\frac{cosx\cdot x-2senx}{x^3}$

2.- a) $y=\frac{3^{5x}}{2x-1}$ b) $y=3^x\cdot cos(x^2-1)$

$\frac{(3^{5x}\cdot Ln\ 3\cdot 5\cdot(2x-1)-3^{5x}\cdot 2}{(2x-1)^2}$

Solución:

a) $y'=\frac{5\cdot 3^{5x}\cdot ln3(2x-1)-2\cdot 3^{5x}}{(2x-1)^2}=\frac{3^{5x}\cdot[5(2x-1)\cdot ln3-2]}{(2x-1)^2}$

b) $y' = 3^x \cdot \ln 3 \cdot \cos(x^2-1) - 3^x \cdot sen(x^2-1)\cdot 2x =$
$= 3^x \cdot [\ln 3 \cdot \cos(x^2-1) - 2x \cdot sen(x^2-1)]$

3.- **Calcula la derivada de la siguiente función implícita: $xy - 2x + 3y = 4$.**

Solución:

$y + xy' - 2 + 3y' = 0$

$y'\cdot(x+3)=2-y \rightarrow y'=\frac{2-y}{x+3}$

(*) → **Halla la derivada de la siguiente función implícita: $x^3 + 6xy + y^3 = 8$.**

Solución:

$3x^2 + 6y + 6xy' + 3y^2 \cdot y' = 0$

$3y' \cdot (2x + y^2) = -3 \cdot (x^2 + 2y)$

$y'=\frac{-(x^2+2y)}{2x+y^2}$

(*) 4.- **Dada la función implícita $x^2 - 3xy - 2y^2 = 4$, calcula su derivada.**

Solución:

$2x-(3y+3xy')-(4y^2\cdot y')=0$

$2x - 3y - 3xy' - 4yy' = 0$ $\quad 2x-3y-3xy'-4y^2y'=0$

$2x - 3y = y' \cdot (3x + 4y)$

$y'=\frac{2x-3y}{3x+4y}$

Halla y' sabiendo que: $x^2 + y^2 = x^2 \cdot y^2$.

Solución:

$2x + 2yy' = 2xy^2 + 2x^2yy'$
$2yy' \cdot (1 - x^2) = 2x \cdot (y^2 - 1)$

$y'=\frac{x\cdot(y^2-1)}{y\cdot(1-x^2)}$

Calcula la derivada de la siguiente función implícita: $4x^2 + 9y^2 = 36$.

Solución:

$8x + 18yy' = 0$

$$y' = \frac{-8x}{18y}$$

5.- **Halla la ecuación de la tangente a la curva $y = \dfrac{x\,(2x+1)}{\sqrt{x+2}}$ en $x_0 = 2$**

Solución:

- Ordenada en el punto: $y\,(2) = 5$
- Pendiente de la recta:

$$y = \frac{x(2x+1)}{\sqrt{x+2}} = \frac{2x^2+x}{\sqrt{x+2}}$$

Derivamos:

$$y' = \frac{(4x+1)\sqrt{x+2} - (2x^2+x)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}}{(x+2)} = \frac{(8x+2)\,(x+2) - (2x^2+x)}{2\sqrt{(x+2)^3}} =$$

$$= \frac{8x^2 + 16x + 2x + 4 - 2x^2 - x}{2\sqrt{(x+2)^3}} = \frac{6x^2 + 17x + 4}{2\sqrt{(x+2)^3}}$$

$$y'(2) = \frac{31}{8}$$

- Ecuación de la recta tangente:

$$y = 5 + \frac{31}{8}(x-2) \;\rightarrow\; y = \frac{31}{8}x - \frac{11}{4}$$

6.- **Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ en el punto (0, 4).**

Solución:

- Comprobamos que la curva pasa por (0, 4):

  $0^2 + 4^2 - 2\cdot 0 - 4\cdot 4 = 16 - 16 = 0$

- Derivamos para obtener la pendiente de la recta:

  $2x + 2y\cdot y' - 2 - 4y' = 0$

Despejamos y':

$$y'(2y-4) = 2 - 2x \;\rightarrow\; y' = \frac{2-2x}{2y-4}$$

Por tanto:

$$y'(0, 4) = \frac{2 - 2\cdot 0}{2\cdot 4 - 4} = \frac{2}{8-4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

- Ecuación de la tangente:

$$y = 4 + \frac{1}{2}x$$

7.- Obtén la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \frac{4x-2}{x(x^2+1)}$ en $x_0 = 1$

Solución:

- Ordenada en el punto: $y(1) = 1$
- Pendiente de la recta:

$$y = \frac{4x-2}{x(x^2+1)} = \frac{4x-2}{x^3+x}$$

Derivamos:

$$y' = \frac{4(x^3+x)-(4x-2)\cdot(3x^2+1)}{(x^3+x)^2} = \frac{4x^3+4x-12x^3-4x+6x^2+2}{(x^3+x)^2} =$$

$$= \frac{-8x^3+6x^2+2}{(x^3+x)^2}$$

$y'(1) = 0$

- Ecuación de la recta tangente: $y = 1$

8.- Halla las rectas tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 6 = 0$ en $x_0 = 1$

Solución:

- Ordenadas en $x_0 = 1$:

$1 + y^2 + 2 + 2y - 6 = 0 \rightarrow y^2 + 2y - 3 = 0$

$$y = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \begin{cases} y = 1 \rightarrow \text{Punto } (1,1) \\ y = -3 \rightarrow \text{Punto } (1,-3) \end{cases}$$

- Pendiente de las rectas tangentes:

Derivamos: $2x + 2y\,y' + 2 + 2y' = 0$

Despejamos y':

$$y'(2y+2) = -2x-2 \rightarrow y' = \frac{-2x-2}{2y+2} = \frac{-x-1}{y+1}$$

$$y'(1,1) = \frac{-1-1}{1+1} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$y'(1,-3) = \frac{-1-1}{-3+1} = \frac{-2}{-2} = 1$$

Ecuaciones de las rectas tangentes:

En el punto $(1, 1) \rightarrow y = 1 - (x-1) \rightarrow y = -x + 2$

En el punto $(1, -3) \rightarrow y = -3 + (x-1) \rightarrow y = x - 4$

9.- **Dada la función $f(x)=x^2\,e^{x^2-1}$, escribe la ecuación de su recta tangente en el punto de abscisa $x_0=-1$.**

Solución:

- Ordenada en el punto: $f(-1) = 1$
- Pendiente de la recta:

$$f'(x) = 2x\cdot e^{x^2-1} + x^2\cdot e^{x^2-1}\cdot 2x = \left(2x+2x^3\right)e^{x^2-1}$$

$f'(-1) = -4$

- Ecuación de la recta tangente:

$y = 1 - 4\,(x+1) \quad \rightarrow \quad y = -4x - 3$