UNIVERSIDAD DE ACONCAGUA

GUIA DE ESTUDIO EXAMEN

I) Aplicación Derivadas, máximos y mínimos (Problemas)

1.- Con una hoja cuadrada de 6 cm de lado se desea construir una caja abierta (sin tapa). ¿Qué dimensiones debe tener el cuadrado que se recorta de las esquinas para construir la caja de volumen máximo? Calcula el volumen máximo.

2.- Se necesita cercar una parcela rectangular destinada al cultivo de hortalizas y para ello se cuenta con 800 m de cerca, ¿Qué dimensiones debe tener la parcela para encerrar el área máxima? Determine el área máxima.

3.- Se dispone de una cartulina cuadrada de lado a y se quiere hacer una caja sin tapa recortando cuadrados iguales en las esquinas y doblando sus lados. ¿Cuál debe ser la **longitud del lado del cuadrado que se recorta para que el volumen de la caja sea máximo? ¿Cuál es el volumen de la caja?.**

4.- Con un rollo de 270 metros de alambrada se deben construir dos corrales adyacentes idénticos, como se muestra en la figura Calcular las dimensiones que debe tener el cercado para que el área abarcada sea máxima.

5.- Se pretende hacer una caja sin tapa de una lámina de aluminio de 10 cm. por lado (cuadrado) se deberá de cortar de las esquinas. ¿Cuánto se deberá de cortar en las esquinas para obtener un máximo volumen?

6.- Un fabriante de cajas de estaño desea emplear piezas de 8×15 plg, cortando cuadrados iguales en las cuatro esquinas y doblando los lados. Calcule la longitud necesaria del lado del cuadrado por cortar si se desea obtener de cada pieza de estaño una caja sin tapa del máximo volumen posible.

7.- Si un lado de un campo rectangular va a tener como límite natural un río, halle las dimensiones del terreno rectangular más grande que puede cercarse usando 240 m de valla para los otros tres lados.

8.- Un rectángulo tiene 120 m. de perímetro. Cuáles son las medidas de los lados del rectángulo que dan el área máxima?

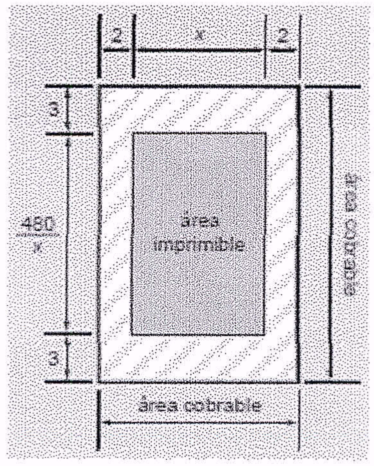
9.- Un agricultor tiene 1,200 metros de material para construir una barda. Quiere cercar un terreno rectangular que colinda con un río a lo largo del cual no se requiere barda. Sea x el ancho del terreno.
a) Deducir una expresión en función de x para lo largo del terreno.
b) Deducir una expresión en función de x para el área del terreno.
c) Calcular las dimensiones del terreno para que su área sea máxima.
d) Calcular el área máxima del terreno.

10.- Se desea construir una caja sin tapa, de base cuadrangular, a partir de una lámina cuadrada de 60 unidades de longitud de lado, recortando cuadrados de sus esquinas y doblando las pestañas sobrantes para que sean su altura. Calcular las dimensiones de la caja de mayor volumen.

11.- Con 875 metros de rollo de alambrada debe cercarse un terreno rectangular por tres de sus lados, ya que el cuarto lado estará limitado por el cause de un río. ¿De qué medidas deberá hacerse para que su superficie sea la máxima abarcada?

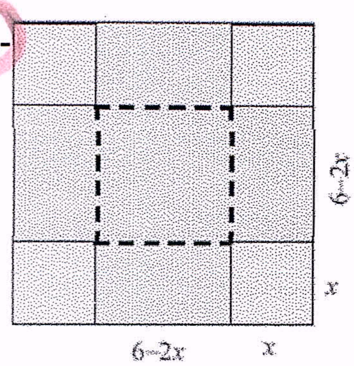
12.- Con 875 metros de rollo de alambrada debe cercarse un terreno rectangular por sus cuatro lados. ¿De qué medidas deberá hacerse para que su superficie sea la máxima abarcada?

13.- Una agencia de publicidad cobra por centímetro cuadrado del área total empleada (área cobrable), lo que incluye el área imprimible más dos márgenes de 2cm a la izquierda y a la derecha y dos de 3 cm arriba y abajo. Un cliente necesita mandar hacer una publicidad que tenga 480 cm^2 de área impresa. Calcular las dimensiones que debe tener la región cobrable para que el costo sea el mínimo (ver figura).



Item: 1

1.-



Vprisma = A_B .h; A_B : área de la base y h : altura

A_B .h = $(6-2x)(6-2x)\,x$

$= (36 - 24x + 4x^2)x$

$= 36x - 24x^2 + 4x^3$ (Función de una variable real)

La derivada es $V'(x) = 36 - 48x + 12x^2$

$= 36 - 48x + 12x^2$

$= 36 - 48x + 12x^2 = 0$ /: (12)

$= x^2 - 4x + 3 = 0$

$= (x-3)(x-1) = 0$

$x_1 = 3;\ x_2 = 1$

- Si x_1=3, las dimensiones de la caja serían 0 y no se obtendría caja alguna.
- Si x_2=1, es posible construir la caja. Analicemos si para x_2 =1, existe volumen máximo.

$V''(x) = -48 + 24x$

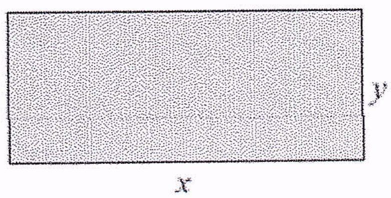
$V''(1) = -48 + 24(1) = -24 < 0$, ⇒ Para x_2=1 se obtiene volumen máximo

R/ Los cuadrados de las esquinas deben ser de 1 cm de lado

$V_{máx} = (4)(4).1 = 16\ cm^3$

2.- SOLUCIÓN

- Como la parcela es rectangular y desconocemos sus dimensiones, dibujemos un rectángulo de dimensiones: x y y.



- Por el dato que nos dan en el problema, se conoce el perímetro del rectángulo, es decir:

$$p = 2x + 2y = 800$$

- De acuerdo al objetivo del problema, se pide maximizar el área, que en el rectángulo está dada por:

$$A = x\,.\,y$$

Es decir, optimizar la función $A = x\,.\,y$ siendo $2x + 2y = 800$

$x + y = 400$

$y = 400 - x$

Sustituyendo en la función a optimizar:

$A = x(400 - x)$

$A = 400x - x^2$ (función a la cual se le debe calcular el máximo relativo).

Como la función anterior depende de una sola variable real, se utiliza el algoritmo de extremos relativos de funciones de una variable.

$A'(x) = 400 - 2x$

$400 - 2x = 0$

$-2x = -400$

$x = 200$ (Punto crítico de dicha función)

$A''_{xx} = -2$, $A''_{xx}(200) = -2$ ⇒ En x=200 hay un máximo relativo

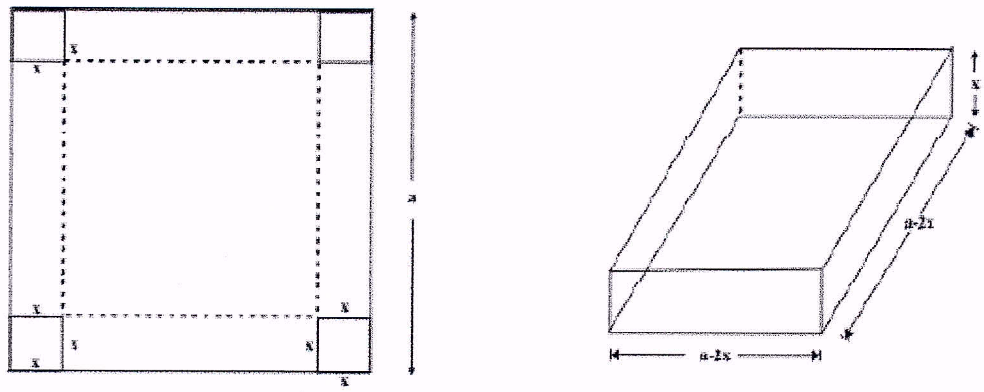
Como $y = 400 - x$, entonces y=200

$A_{máx} = (200)(200) = 40\,000\ m^2 = 4$ ha

R/ Para cercar el área máxima con la cerca dada, la parcela debe ser cuadrada de 200 m de lado y la máxima área a cercar es de 40 000 m^2 ó 4 ha.

3.- Solución:

Sea x: longitud del lado del cuadrado que se recorta en cada una de las esquinas (a)), donde $0 \leq x \leq \frac{a}{2}$.



(a) (b)

Al doblar la parte de cartulina restante, se forma la caja abierta que aparece en (b).

Ahora, volumen de la caja = área de la base x altura. Esto es,

$$V(x) = (a-2x)^2 \cdot x = 4x^3 - 4ax^2 + a^2x; \quad 0 \leq x \leq \frac{a}{2} \qquad (1).$$

Puesto que $V(x)$ **(función a maximizar)** es una función continua en el intervalo $\left[0, \frac{a}{2}\right]$, entonces $V(x)$ alcanza un valor máximo y un valor mínimo en dicho intervalo.

Al derivar $V(x)$ en (1) e igualar a cero, se obtienen los puntos críticos. En efecto:

$$V'(x) = 12x^2 - 8ax + a^2 = (2x-a)(6x-a) = 0$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{ccc} 2x-a=0 & \Rightarrow & x=\frac{a}{2} \\ \vee & & \vee \\ 6x-a=0 & \Rightarrow & x=\frac{a}{6} \end{array}\right\} \text{ puntos críticos}$$

Para analizar la naturaleza de los puntos críticos, se usa el criterio de la segunda derivada.

Así, $V''(x) = 24x - 8a$

$V''\left(\frac{a}{2}\right) = 24\left(\frac{a}{2}\right) - 8a = 4a > 0$, lo cual indica que $x = \frac{a}{2}$ corresponde a un mínimo relativo. (interprete geométricamente el resultado).

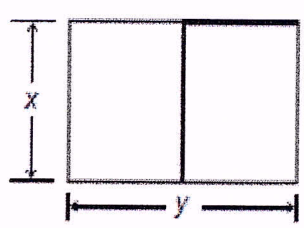
$V''\left(\frac{a}{6}\right) = 24\left(\frac{a}{6}\right) - 8a = -4a < 0$, lo cual indica que $x = \frac{a}{6}$ corresponde a un máximo relativo.

En consecuencia, el volumen máximo se obtiene recortando en las esquinas de la cartulina cuadrados de lado $\frac{a}{6}$ y se obtiene de esta forma una caja cuyo volumen viene dado por:

$$V\left(\frac{a}{6}\right) = \left(a - 2\cdot\frac{a}{6}\right)^2 \cdot \frac{a}{6} = \frac{2}{27}a^3.$$

4.- Solución:

Sean x el ancho y y la longitud del cercado total. Como se disponen de 270 metros de alambrada y se van a emplear tres secciones de longitud x y dos de longitud y, entonces $3x + 2y = 270$, de donde



$3x + 2y = 270$

$2y = 270 - 3x$

$y = \frac{270 - 3x}{2}$

$$y = 135 - \frac{3x}{2} \qquad .1)$$

$y = \frac{270}{2} - \frac{3x}{2}$

$y = 135 - \frac{3x}{2}$

$A = x \cdot y$

El área total es

$A = x \cdot \left(135 - \frac{3x^2}{2}\right)$

$$A = xy = x\left(135 - \frac{3x}{2}\right)$$

$$\boxed{A = 135x - \frac{3x^2}{2}} \qquad .2)$$

$A = 135x - \frac{3x^3}{2}$

Derivando .2):

$A' = 135 - 3x^2 \cdot 2^{-1}$

$$\frac{dA}{dx} = 135 - 3x \qquad .3)$$

$6x \cdot 2^{-1}$

Igualando a cero y resolviendo la ecuación que resulta:

$135 - 3x = 0$

$$135 - 3x = 0$$
$$x = 45 \qquad .4)$$

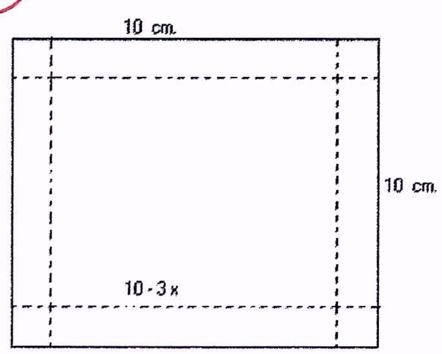
45

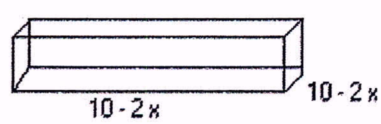
Considerando que los valores frontera de la variable x son $x = 0$ y $x = 90$ en los cuales el área abarcada es cero, o sea mínima, tiene que existir un máximo entre 0 y 90. Ese es el valor crítico calculado de $x = 45$. Sustituyendo .4) en .1) para obtener el valor de la base y, se obtiene que

$$y = 135 - \frac{3(45)}{2} = 67.5$$

Las dimensiones de los dos corrales deben ser de 45×67.5 metros, que dan el área máxima de 3037.5.

5.- Solución:





$$v(x) = (10 - 2x)(10 - 2x)x$$

$$v(x) = (10 - 2x)^2 x = (100 - 40x + 4x^2)x = 100x - 40x^2 + 4x^3$$

$$v'(x) = 100 - 80x + 12x^2 \quad \therefore \quad v''(x) = -80 + 24x$$

$$v''(5/3) = -80 + (24)(5/3) = -40$$

$3x^2 - 20x + 25 = 0$ (la función de dividió por 4, v´(x))

$$x = \frac{-(-20 \pm \sqrt{(-20)2 - 4(3)(25)}}{2(3)} = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 300}}{6}$$

$x = \frac{20 \pm \sqrt{100}}{} = \frac{20 \pm \sqrt{100}}{} = \frac{20 \pm 10}{}$

6 6 6

$x_1 = 5$ $x_2 = \dfrac{10}{6} = \dfrac{5}{3}$

$\boxed{\text{Con } x = 5/3 \text{ es máximo}}$

6.- Solución:

Sea

$V(x)$: volumen de la caja en función de x

De tal manera que:

$$V(x) = (8-2x)(15-2x)x,$$

$$\Rightarrow \quad V(x) = 4x^3 - 46x^2 + 120x$$

Como x no puede ser negativo ni menor que 4, entonces el dominio de V, $domV$, es $domV = [0,4]$

V es una función polinomial, entonces V es continua en $\mathbb{R}$, y por ende en $[0,4]$. Por lo que, de acuerdo con el Teorema del valor extremo, V tiene un valor máximo absoluto en $[0,4]$. Veamos:

$$V'(x) = 12x^2 - 92x + 120 = 4(x-6)(3x-5)$$

$V'(x)$ existe para todo x

$V'(x) = 0$ cuando $x = 6$, ó, $x = \dfrac{5}{3}$; pero

$6 \notin [0,4]$ y $\dfrac{5}{3} \in [0,4]$. Así,

$\dfrac{5}{3}$: # crítico de V en $[0,4]$

Ahora:

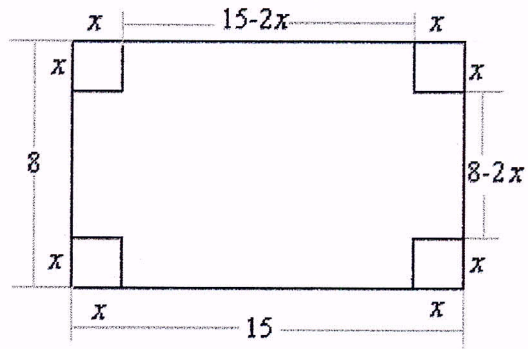
$V(0) = 0$

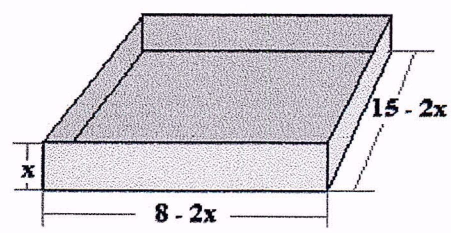
$V(5/3) \approx 90.74$

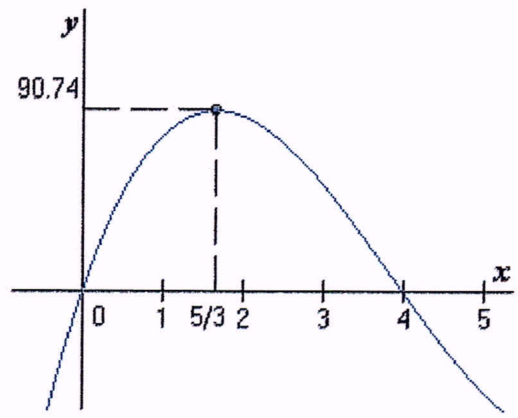
$V(4) = 0$

Por lo tanto, el valor máximo absoluto de V en $[0,4]$ ocurre en 5/3.

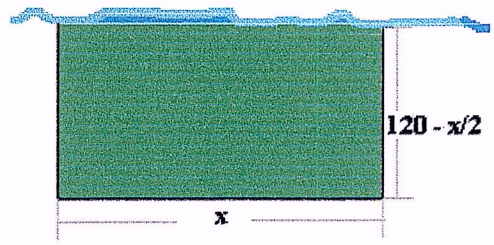
Respuesta: la longitud x, del lado por cortar ha de ser 5/3 plg.







7.- Solución:



Sea

x: longitud del lado que es paralelo al rio;

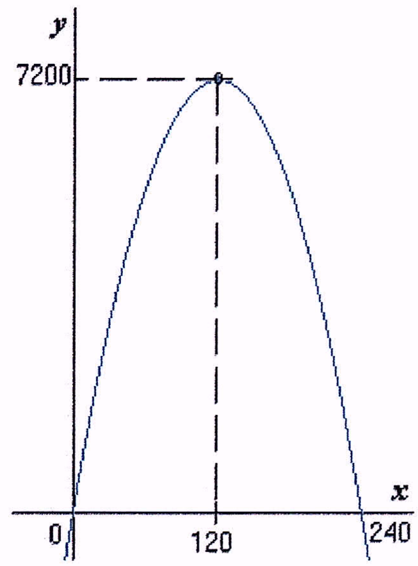
$\therefore \quad \dfrac{240-x}{2}$: longitud de cada uno de los otros dos lados

Si A es el área del terreno, en función de x, entonces

$$A(x)=\left(\frac{240-x}{2}\right)x=120x-\frac{1}{2}x^2$$

Como x no puede ser negativo ni menor que 240, entonces el dominio de A, $domA$, es $domA=[0,240]$

A es una función polinomial, entonces A es continua en $\mathbb{R}$, y por ende en $[0,240]$. Por lo que, de acuerdo con el Teorema del valor extremo, A tiene un valor máximo absoluto en $[0,240]$. Veamos:



$A'(x)=120-x$

$A'(x)$ existe para todo x

$A'(x)=0$ cuando $x=120$; y $120\in[0,240]$. Así,

120: # crítico de A en $[0,240]$

Ahora:

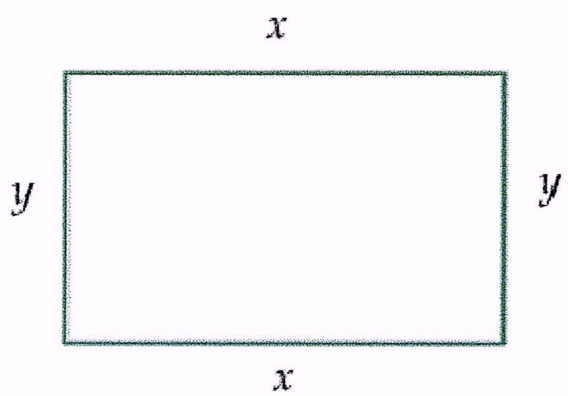
$A(0)=0$

$A(120)=7200$

$V(240)=0$

8.- Solución:

Se debe maximizar el área A de un rectángulo:



Designemos con "x", "y" las longitudes de los lados del rectángulo.

Luego $A=xy$

Como el perímetro del rectángulo es 120 m. entonces <u>la ecuación auxiliar es:</u>

$2x+2y=120$ de donde $y=60-x$.

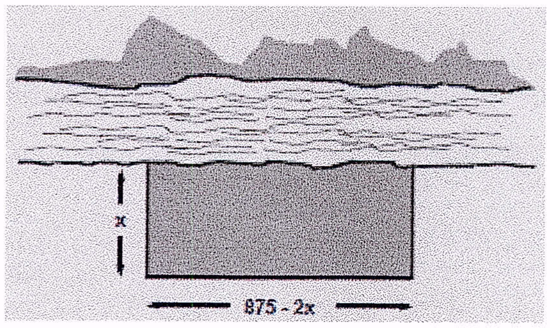
Luego $A(x)=x(60-x)=60x-x^2$

Como $A'(x)=60-2x$ y $A'(x)=0\Leftrightarrow x=30$ entonces $x=30$ es un valor crítico.

Analicemos si este valor es máximo o mínimo utilizando el criterio de la segunda derivada:

por lo tanto su volumen es cero. Como no puede haber dos mínimos seguidos sin que haya al menos un máximo en medio, el valor crítico obtenido de $x = 10$ debe ser máximo.
Las dimensiones de la cajita han de ser $10 \times 40 \times 40$ y el volumen máximo que se puede obtener es de
$V = 10 \times 40 \times 40$
$V = 16\,000$.

11.- Solución:
A pesar de la irregularidad del bordo del río, se considerará como si fuera una línea recta para que el terreno tome una forma rectangular perfecta.
Sea x la altura del rectángulo , por lo tanto, la base será $875 - 2x$ y la superficie del terreno será



$S = x\,(875 - 2x)$

$S = 875x - 2x^2$

Esta es la función a la que debe aplicarse el procedimiento de máximos y/o mínimos.
Entonces derivándola:
$S' = 875 - 4x$
igualando a cero y resolviendo:

$875 - 4x = 0$
$-4x = -875$
$X = \dfrac{-875}{-4}$
$x = 218.75$
Este es el valor crítico. Por lógica se deduce que cuando $x = 0$ o bien cuando $x = 437.5$ se obtiene la superficie mínima (son los valores frontera de la variable x), que es cero, porque en realidad se construye una línea recta doble. Por lo tanto, con $x = 218.75$ se obtiene el máximo.

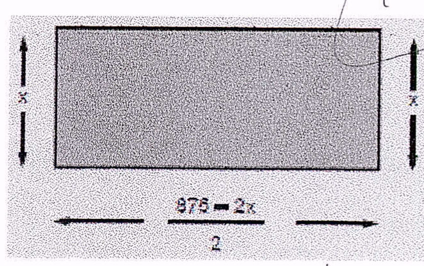
Las dimensiones del terreno deben ser
$x \times (875 - 2x)$
$218.75 \times (875 - 437.5)$
218.75×437.5

Y
X
$P = 875$
$2X + 2Y = 875$
$\boxed{A = X \cdot Y}$
$2Y = 875 - 2X$
$Y = \dfrac{875 - 2X}{2}$

12.- Solución: A diferencia del ejemplo anterior, ahora va a cercarse el terreno por sus cuatro lados.

Sea x la altura del rectángulo; por lo tanto, la base será $\dfrac{875 - 2x}{2}$ (ver figura)

y la superficie del terreno será



$$S = (x)\left(\frac{875 - 2x}{2}\right)$$

$$S = \frac{875x - 2x^2}{2}$$

que es la función a derivar:

$$\frac{dS}{dx} = \frac{1}{2}(875 - 4x)$$

$A = X \cdot \left(\dfrac{875 - 2X}{2}\right)$

$A = \dfrac{875X - 2X^2}{2}$

$A = \dfrac{875X}{2} - \dfrac{\cancel{2}X^2}{\cancel{2}}$

$A = \dfrac{875X}{2} - X^2$

$A = \dfrac{875}{2} - 2X$

$A = 437{,}5 - 2X = 0$

$437{,}5 = 2X$

$\dfrac{437{,}5}{2} = X$

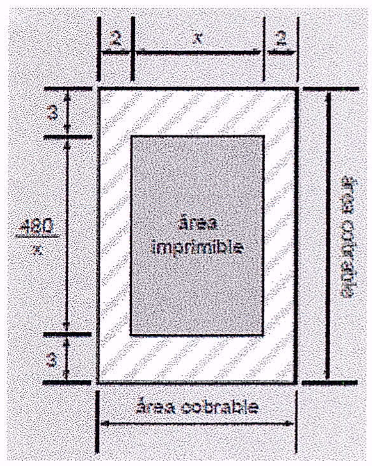
$\boxed{218{,}75 = X}$

igualando a cero y resolviendo la ecuación resultante:

$$\frac{1}{2}(875-4x)=0$$
$$875-4x=0$$
$$4x=875$$
$$x=\frac{875}{4}$$
$$x=218.75$$

Este es el valor crítico. Los valores frontera de la variable x son $x=0$ y $x=437.5$ porque dicha variable no puede valer menos que cero ni más que 437.5. Nuevamente se deduce por lógica que este valor crítico es un valor máximo, ya que cuando $x=0$ o bien cuando $x=437.5$ el área abarcada es mínima (igual a cero). Por lo tanto, el cuadrado es el de mayor área en virtud de que los cuatro lados deben medir 218.75.

13.- Solución: Como la empresa cobra por el área total utilizada, incluidos los márgenes, el costo será mínimo cuando dicha área sea mínima.



Sea x la base del rectángulo del área imprimible. Por lo tanto, como dicha área (base por altura) debe ser de 480 cm², la altura es entonces

$$\text{altura}=\frac{480}{x} \qquad (\ .1)$$

Entonces el área cobrable es un rectángulo cuyas dimensiones son $(x+4)$ de base (ver figura) por $\left(\frac{480}{x}+6\right)$ de altura, es decir, el área cobrable es

$$A_c=(x+4)\left(\frac{480}{x}+6\right) \qquad (\ .2)$$

$$A_c=6x+\frac{1920}{x}+504$$

Esta es la función a la que debe aplicarse el procedimiento de máximos y/o mínimos. Entonces derivándola:

$$A'_c=6-\frac{1920}{x^2}$$

igualando a cero y resolviendo:

$$A'_c=6-\frac{1920}{x^2}=0/x^2$$

$$6x^2-1920=0$$

$$6x^2=1920$$

$$x^2=\frac{1920}{6}=320$$

$x^2=320/$