Ecuaciones Matriciales y Determinantes.

Ecuaciones Matriciales.

Tenemos que obtener la matriz incógnita, que generalmente se denota como X, despejándola de la igualdad. Para conseguirlo tenemos las siguientes reglas:

1) Si una matriz está sumando a un lado de la igualdad pasa restando al otro lado de la igualdad y al revés.

$X+B=C \rightarrow X=C-B$

$X-B=C \rightarrow X=C+B$

2) Si multiplicamos una matriz por la izquierda a un lado de la igualdad también lo tenemos que hacer en el otro lado de la igualdad por la izquierda. Igual por la derecha.

$A\cdot X=B \rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot B \rightarrow Id\cdot X=A^{-1}\cdot B \rightarrow X=A^{-1}\cdot B$

$X\cdot A=B \rightarrow X\cdot A\cdot A^{-1}=B\cdot A^{-1} \rightarrow X\cdot Id=B\cdot A^{-1} \rightarrow X=B\cdot A^{-1}$

Ejemplos.

Dada la matriz B=$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ hállese una matriz X que verifique la ecuación $XB+B=B^{-1}$.

- Sean X una matriz 2x2, I la matriz identidad 2x2 y B=$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Hallar X sabiendo que $BX+B=B^2+I$.

1

Calculando B^{-1} tenemos que $B^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ con lo que $X=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}=4\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2

$$BX + B = B^2 + I \rightarrow BX = B^2 + I - B \rightarrow B^{-1}\cdot(BX) = B^{-1}\left(B^2 + I - B\right) \rightarrow$$

$$X = B^{-1}B^2 + B^{-1} - B^{-1}B \rightarrow X = B + B^{-1} - I$$

Calculando $B^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow X=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

1 Sean B=$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y C=$\begin{pmatrix} 13 & 8 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$ calcular A sabiendo A^2=B y A^3=C

2 Dadas las matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y A=$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, hállese la matriz B sabiendo que $P^{-1}BP=A$.

Sabiendo que P^{-1} es $$P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinantes.

Los determinantes nos proporcionan un método para el cálculo de la matriz inversa de una dada (en caso de existir) y un criterio para estudiar si una matriz es o no invertible.

Sus aplicaciones son múltiples en todas las ramas de las ciencias que tratan problemas lineales en los que necesariamente aparecen matrices y por tanto, determinantes.

A cada matriz cuadrada $A = (a_{ij}) \;\; 1 \leq i, j \leq n$ se le asigna un número real que llamaremos *determinante de A* y representaremos por $\det A$ o $|A|$.

Definición:

Si es una matriz 2 x 2 se define el determinante de la matriz A, y se expresa como det(A) o bien $|A|$, como el *número:*

$$det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Ejemplos: El cálculo de los determinantes de orden 2 es bien sencillo, por ejemplo:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$ =1·4-(-1)·3=4+3=7.

b) $\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$ =-10+6=-4.

Para definir determinantes de matrices de orden mayor que 2 es necesario introducir previamente algunos conceptos.

Dada una matriz cuadrada A de orden n, definimos el *menor complementario* de un elemento de A,a_{ij} , como el determinante de la matriz que se obtiene al suprimir la fila i y la columna j en la que se encuentra dicho elemento a_{ij}. Se representa por M_{ij}.

Ejemplo: En la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & -3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, los menores complementarios de cada uno de los elementos de la primera fila son:

Menor complementario de -2:$M_{11} = \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$ =14-0=14.

Menor complementario de 4:$M_{12} = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ =12+9=21.

Menor complementario de 5:$M_{13} = \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$ =0-21=-21.

Y así sucesivamente.

Estrechamente ligado al concepto de menor complementario se encuentra el de adjunto de una matriz.

Dada una matriz cuadrada A de orden n, definimos el *adjunto de un elemento* a_{ij} de A como el número:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

es decir, no es más que el menor complementario correspondiente acompañado de un signo más o menos dependiendo de la fila y la columna en la que se encuentre el elemento en cuestión.

Por ejemplo, para la matriz anterior, los adjuntos de los elementos de la primera fila son:

Adjunto de -2:$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = 1 \cdot 14 = 14$ (coincide con el menor complementario)

Adjunto de 4:$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = (-1) \cdot 21 = -21$ (menor complementario con signo cambiado)

Adjunto de 5:$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = 1 \cdot -21 = -21$ (coincide con el menor complementario).

En general puede saberse si el signo del menor complementario y del adjunto coinciden o no utilizando una sencilla regla gráfica, por ejemplo, para matrices 3 x 3 y 4 x 4 basta fijarse en las matrices:

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

donde el + significa que el adjunto coincide con el menor complementario y el - indica que tienen signo contrario.

Ejemplo: Para la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & -3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,aplicando la definición, si elegimos la fila tercera queda:

$$det(A) = 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} + 0 \cdot \left(- \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} \right) + 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} =$$
$$= 3 \cdot (-12 - 35) + 0 \cdot (-(6 - 30)) + 2 \cdot (-14 - 24) = -141 + 0 - 76 = -217$$

Si hubiésemos elegido otra fila o columna, por ejemplo la columna 2, quedaría:

$$det(A) = 4 \cdot \left(- \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \right) + 7 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot \left(- \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} \right) =$$
$$= 4 \cdot (-(12 + 9)) + 7 \cdot (-4 - 15) + 0 \cdot (-(6 - 30)) = -84 - 133 + 0 = -217$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 3 & 8 \\ 18 & 10 & 28 \\ 12 & 7 & 16 \end{vmatrix} \qquad \text{-24,}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 14 \\ 9 & 10 & 49 \\ 6 & 7 & 28 \end{vmatrix} \qquad \text{-21}$$

Hallar los valores de *t* que anulan el primer determinante,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-t \\ 1 & t & 0 \\ 2 & 4 & t \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} t & 2 & 2 \\ 2 & t & 0 \\ 1 & t & t \end{vmatrix}$$

Solución:

a) Desarrollamos el determinante e igualamos a cero el resultado:

$$\begin{vmatrix} t & 2 & 2 \\ 2 & t & 0 \\ 1 & t & t \end{vmatrix} = t^3 + 4t - 2t - 4t = t^3 - 2t = t\left(t^2 - 2\right) = 0 \quad \to \quad \to \quad \begin{cases} t = 0 \\ t^2 - 2 = 0 \quad \to \quad t^2 = 2 \quad \to \quad t = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

Hay tres soluciones: $t_1 = 0; \quad t_2 = -\sqrt{2}; \quad t_3 = \sqrt{2}$

Solución:

a) Calculamos el valor del determinante: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-t \\ 1 & t & 0 \\ 2 & 4 & t \end{vmatrix} = t^2 + 4(1-t) - 2t(1-t) - t = t^2 + 4 - 4t - 2t + 2t^2 - t = 3t^2 - 7t + 4$

Veamos para que valores de *t* se anula el determinante: $3t^2 - 7t + 4 = 0 \quad \to \quad t = \dfrac{7 \pm \sqrt{49-48}}{6} = \dfrac{7 \pm 1}{6} \quad \begin{cases} t = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3} \\ \\ t = \dfrac{6}{6} = 1 \end{cases}$