Ejercitación para evaluación: Limites laterales

Ejemplo 1.- Calcular **a)** $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ y **b)** $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, donde

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1, & si \quad x<1 \\ 3 & si \quad x=1 \\ 3x-1 & si \quad x>1 \end{cases}$$

Observe que si $x \to 1^-$, estos x son menores que 1, así que $f(x) = x^2 + 1$ allí.

Por tanto

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x^2 + 1) = 1^2 + 1 = 2.$$

De manera análoga, si $x \to 1^+$, estos x son mayores que 1, así que $f(x) = 3x - 1$ allí.

Así

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^{-+}} (3x - 1) = 3.1 - 1 = 2.$$

Como los dos límites laterales son iguales a 2, concluimos que

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

b) Para calcular $\lim_{x \to 2} f(x)$ tomamos en cuenta que a medida que estamos más cerca de 2, los x son mayores que 1, por tanto $f(x) = 3x - 1$.

Así

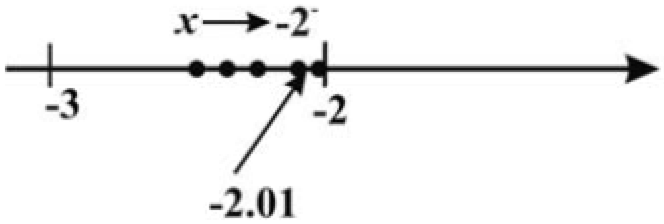
$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} 3x - 1 = 5.$$

Ejemplo 2.- Calcular $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$, donde $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4-x^2}{x+2}, & si \quad x < -2 \\ x-1 & si \quad x > -2 \end{cases}$

Solución:

Como la función está definida con una fórmula antes de -2 y otra después de -2, hay que usar límites laterales y luego ver si son iguales o no para concluir la existencia del límite que nos interesa.

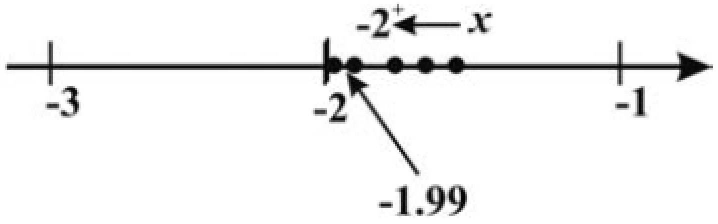
Observe que si $x \to -2^-$, estos x son menores que -2,



así que $f(x) = \dfrac{4 - x^2}{x+2}$ allí. Por tanto

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} \frac{4-x^2}{x+2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to -2^-} \frac{(2-x)(2+x)}{x+2} = \lim_{x\to -2}(2-x) = 4.$$

De manera análoga, si $x \to -2^+$, estos x son mayores que -2, así que $f(x) = x - 1$ allí. De aquí



$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+}(x-1) = -2-1 = -3.$$

Como los dos límites laterales son distintos concluimos que $\lim_{x\to -2} f(x)$ no existe.

Ejemplo 3.- Consiga el valor de k para el cual $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ existe, donde $f(x) = \begin{cases} kx + 2, & si \quad x < 3 \\ x^2 - 1 & si \quad x > 3 \end{cases}$

Solución: La función está definida por partes y justo en 3 cambia la fórmula para evaluar la función. Para que el límite $\lim_{x \to 3} f(x)$ exista los límites laterales deben ser iguales. Así que el procedimiento es calcular el límite lateral por la izquierda, que dependerá de *k*, y el límite por la derecha, luego plantear la ecuación que los dos límites laterales son iguales, resolviendo la ecuación se obtendrá el valor de *k*.

El límite por la izquierda:

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} kx + 2 = k \cdot 3 + 2$$

El límite por la derecha

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} x^2 - 1 = 9 - 1 = 8$$

Se plantear la ecuación

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^+} f(x)$$

$$3k + 2 = 8$$

La solución de esta ecuación es $k = 2$, así que para este valor de *k,* los límites laterales son iguales y por consiguiente el límite $\lim_{x \to 3} f(x)$ existe si y sólo si $k = 2$.

Ejercicio de desarrollo- Calcular $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ donde

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+12}, & si \quad x<2\\ 3 & si \quad x=2\\ x^2 & si \quad x>2\end{cases}$$

Respuesta: $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=9$; $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ si existe y vale 4.

Ejercicio de desarrollo. Consiga el valor de k para el cual $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ existe, donde

$$f(x)=\begin{cases}3x-2, & si \quad x<-1\\ 1 & si \quad x=-1\\ xk+3 & si \quad x>-1\end{cases}$$

(**Respuesta**: k=8)

Ejemplo 1.- Determinar si la función f es continua en 0 donde $f(x) = \begin{cases} 1, & si \quad x \leq 0 \\ x - 1 & si \quad x > 0 \end{cases}$

Definición.- Decimos que una función f es continua en un punto x_0 si cumplen las siguientes condiciones:

1.- $f(x_0)$ está definida.

2.- El $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe y

3.- $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Solución: Para determinar la continuidad iremos chequeando una por una las tres condiciones de la definición, en cuanto una condición no se cumpla podremos concluir de una vez que la función no es continua en el punto en cuestión.

1.- f está definida en 0: efectivamente $f(0)=1$.

2.- $\lim_{x \to 0} f(x)$ no existe, pues $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -1$ y $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1$. De aquí concluimos que la función es discontinua en 0.

Remarcamos que para ver que una función es continua en un punto hay que chequear que se cumple las tres condiciones.

Ejemplo 2.- Determinar si la siguiente función es continua en 1.

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & si \quad x<1 \\ \\ 2x-1 & si \quad x\geq 1 \end{cases}.$$

1.- f está definida en 1:

$$f(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1.$$

2.- Para la segunda condición calculamos límites laterales:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} 2x - 1 = 1 \text{ y}$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x^2 = 1.$$

Por tanto $\lim_{x \to 1} f(x)$ existe y vale 1

3.- Finalmente pasamos a la condición 3: vemos que $f(1) = \lim_{x \to 1} f(x)$. De aquí concluimos que la función es continua en 1.

1. Halla la ecuación de la recta tangente a la función

$f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 2$ en $x = -2$.

1. Halla la ecuación de la recta tangente a la función
$f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 2$ en $x = -2$.

Ecuación: $y - f(x_o) = m(x - x_o)$

– Cálculo de m pendiente de la recta $\longrightarrow m = f'(x_o)$
Hacemos la derivada y sustituimos el valor de x por – 2.
$f'(x) = 6x^2 + 10x \quad \Longrightarrow f'(2) = 6 \cdot (-2)^2 + 10 \cdot (-2) \quad \Longrightarrow m = 4.$

– Calculamos el valor de $f(x_o)$ sustituyendo
$x = -2$ en la función $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 2$
$f(2) = 2(-2)^3 + 5(-2)^2 - 2 \Longrightarrow f(2) = -16 + 20 - 2 \Longrightarrow f(2) = 2$

– Escribimos los valores obtenidos en la ecuación de la recta tangente, $y - f(x_o) = m(x - x_o)$
$y - 2 = 4[x - (-2)] \longrightarrow y = 4x + 8 + 2$
La ecuación de la recta tangente es: $y = 4x + 10$