

Cálculo de la matriz inversa de orden 3

Relación entre la inversa y los determinantes

Hay una estrecha relación entre la inversa de una matriz cuadrada y su determinante. De hecho se verifica que:

Propiedad: Una matriz cuadrada A tiene inversa $\iff |A| \neq 0$.

Además, en este caso, la matriz inversa de A , A^{-1} se calcula de la manera:

$$A^{-1} = \frac{(\text{Adj}(A))^t}{|A|}$$

Matriz adjunta.

La matriz adjunta de una matriz cuadrada A es otra matriz que resulta de sustituir cada elemento por su adjunto.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}; \text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

Ejemplo:

Calcule la matriz adjunta de $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 4 = -2; A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(2 - 3) = 1; A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -(4 - 0) = -4; A_{22} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (8 - 0) = 8; A_{23} = -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -(16 - 6) = -10;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2; A_{32} = -\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(4 - 0) = -4; A_{33} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 2 = 2;$$

$$\text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}; \text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -4 & 8 & -10 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

Para calcular la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ se procede así:

Se comprueba primero si el determinante de la matriz es distinto de cero, pues en caso contrario, la matriz no admite inversa.

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 3 + 0 \cdot 1 \cdot 4 - 3 \cdot 1 \cdot 0 - 4 \cdot 1 \cdot 4 - 2 \cdot 1 \cdot 2 = -6 \neq 0$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}; \text{Adj}(A^t) = \text{Adj}\left(\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -4 & 8 & -10 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Para obtener la matriz inversa A^{-1} se divide la matriz adjunta de la traspuesta de A por su determinante que ya ha sido calculado:

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -4 & 8 & -10 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}}{-6} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2

En primer lugar, $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - (1 - 3 + 0) = 2$ y por tanto A tiene inversa.

Calculando $\text{Adj}(A)$, se obtiene:

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$(\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Y entonces, se obtiene:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Guía preparación de prueba

Calcula la inversa de la matriz $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & 5 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ y comprueba que el resultado es $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -5 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calcula la inversa de la matriz $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ y comprueba que el resultado es $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -7 \\ 2 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calcula la inversa de la matriz $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 10 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y comprueba que el resultado es $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -10 \\ 4 & 1 & -6 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calcula los siguientes determinantes usando las propiedades de éstos:

$$(b) \begin{vmatrix} 3 & 3 & 8 \\ 9 & 10 & 31 \\ 6 & 7 & 16 \end{vmatrix}, \quad (c) \begin{vmatrix} 3 & 3 & 8 \\ 10 & 11 & 32 \\ 6 & 7 & 16 \end{vmatrix}$$

$$(b) \quad -21, \quad (c) \quad -16$$

$$(b) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 6 & 10 & 35 \\ 4 & 7 & 18 \end{vmatrix}, \quad (c) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 7 & 11 & 36 \\ 4 & 7 & 18 \end{vmatrix}$$

$$(b) \quad -16, \quad (c) \quad -9$$

Sea A la matriz $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calcular k tal que se cumpla la siguiente igualdad $(A-kId)^2=0$

Calcular la matriz X, en la ecuación matricial $B(2A+Id)=AXA+B$ siendo

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & -4 & 7 \\ -3 & -9 & 16 \\ 2 & 7 & -13 \end{pmatrix}$$