Matrices.

1. DEFINICIÓN Y CLASIFICACIÓN DE MATRICES

Las matrices son utilizadas por primera vez hacia el año 1850 por James Joseph Sylvester. El desarrollo inicial de la teoría matricial se debe al matemático británico William Rowan Hamilton en 1853. En 1857 el matemático Arthur Cayley introduce la notación matricial como una forma abreviada de escribir un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas.

Las matrices se utilizan en cálculo numérico, solución de sistemas de ecuaciones lineales, ecuaciones diferenciales y derivadas parciales. Además de su utilidad para el estudio de sistemas de ecuaciones lineales, las matrices aparecen de forma natural en geometría, estadística, economía, informática, física, etc.

La utilización de matrices (arreglos, arrays) constituye actualmente una parte esencial en los lenguajes de programación, ya que la mayoría de los datos se introducen en las computadoras como tablas organizadas en filas y columnas : hojas de cálculo, bases de datos, etc.

Se denomina matriz de orden $m \times n$ a todo conjunto rectangular de elementos a_{ij} dispuestos en m líneas horizontales (filas) y n verticales (columnas):

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & \ldots & a_{2n} \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & a_{m-1n-1} & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

En nomenclatura matricial, a las matrices se les denota con una letra mayúscula, $A=[A]=(a_{ij})$, con i =1, 2, ..., m, j =1, 2, ..., n. Los subíndices indican la posición del elemento dentro de la matriz, el primero denota la fila (i) y el segundo la columna (j). El elemento a_{25}, por ejemplo, es el elemento de la fila 2 y columna 5.

Dos matrices son iguales cuando tienen la misma dimensión y los elementos que ocupan el mismo lugar en ambas son iguales.

Atendiendo a su forma, las matrices se clasifican en:

Matriz fila: Es una matriz que solo tiene una fila, m =1 y por tanto es de orden 1×n.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & \dots & a_{1n} \end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix} 8 & -5 & 3 & 0 & 9 & 6 \end{bmatrix}$$

Matriz columna: Es una matriz que solo tiene una columna, es decir, $n = 1$ y por tanto es de orden $m \times 1$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m-1,1} \\ a_{m1} \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Matriz cuadrada: Es aquella que tiene el mismo número de filas que de columnas, es decir m = n. En estos casos se dice que la matriz cuadrada es de orden n, y no n × n.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 15 & 0 & 5 \\ -6 & \boxed{3} & 4 & -2 \\ 1 & -12 & \boxed{2} & 10 \\ 8 & 9 & 0 & \boxed{5} \end{bmatrix}$$

Los elementos a_{ij} con i = j, o sea a_{ii} forman la diagonal principal de la matriz cuadrada.

Atendiendo a los elementos, se pueden identificar los siguientes tipos de matrices:

Matriz nula: es aquella que todos sus elementos son 0.

$$A = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz diagonal: Es una matriz cuadrada, en la que todos los elementos no pertenecientes a la diagonal principal son nulos.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

Matriz escalar: Es una matriz diagonal cuyos elementos pertenecientes a la diagonal principal son iguales.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz unidad o identidad: Es una matriz escalar con los elementos de la diagonal principal iguales a 1.

Matriz triangular: Es una matriz cuadrada cuyos elementos que están a un mismo lado de la diagonal principal son cero. Pueden ser de dos tipos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 11 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Triangular superior: Si los elementos que están por debajo de la diagonal principal son todos nulos. Es decir, $a_{ij}=0 \ \forall \ i<j$.

Triangular inferior: Si los elementos que están por encima de la diagonal principal son todos nulos. Es decir, $a_{ij}=0 \ \forall j<i$.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -5 & 0 & 0 \\ 1 & 12 & -16 & 0 \\ 5 & 6 & 8 & -19 \end{bmatrix}$$

Matriz transpuesta: La matriz transpuesta de A (A es una matriz cualquiera), se representa por A^t. Esta se obtiene cambiando filas por columnas. La primera fila de A es la primera columna de A^t , la segunda fila de A es la segunda columna de A^t, etc.

De la definición se deduce que si A es de orden *m x n*, entonces A^t es de orden $n \times m$.

$$A_{2x3} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 6 \\ 9 & 0 & 8 \end{bmatrix} \qquad A^t_{3x2} = \begin{bmatrix} -1 & 9 \\ 4 & 0 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

Matriz simétrica: Una matriz cuadrada A es simétrica si $A = A^t$, es decir, si $a_{ij} = a_{ji}\ \forall$ i, j.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -4 & 11 & 2 \\ 5 & 6 & -8 & 6 & 12 \\ -4 & -8 & 0 & -9 & 10 \\ 11 & 6 & -9 & 14 & 19 \\ 2 & 12 & 10 & 17 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -12 \\ -2 & 7 & 4 & -10 \\ 1 & -4 & 9 & 7 \\ 12 & 10 & -7 & 9 \end{bmatrix}$$

Matriz antisimétrica: Una matriz cuadrada es antisimétrica si $A = -A^t$, es decir, si $a_{ij} = -a_{ji}\ \forall$ i, j.

2. OPERACIONES CON MATRICES.

Transposición de matrices. Dada una matriz de orden *m x n*, A= (a_{ij}), se llama matriz traspuesta de A, y se representa por A^t, a la matriz que se obtiene cambiando las filas por las columnas (o viceversa) en la matriz A.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 4 & -5 \\ 7 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad A^t = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 & 0 \\ 9 & -5 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Propiedades de la transposición de matrices

1. Dada una matriz A, siempre existe su transpuesta y además es única.
2. $(A^t)^t = A$.

Suma y diferencia de matrices. La suma de dos matrices $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$, es otra matriz $S=(s_{ij})$ del mismo orden que los sumandos y con término genérico $s_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$. Por tanto, para poder sumar dos matrices estas deben ser del mismo orden o dimensión.

La suma de las matrices A y B se denota por A+B.

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 9 \\ 6 & 7 & 8 \\ 4 & 6 & 7 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 5 & 6 & -4 \end{bmatrix}$$

$$A+B=\begin{bmatrix} (3+4) & (0+5) & (9+1) \\ (6+0) & (7+3) & (8-3) \\ (4+5) & (6+6) & (7-4) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 & 5 & 10 \\ 6 & 10 & 5 \\ 9 & 12 & 3 \end{bmatrix}$$

Propiedades de la suma de matrices

1. $A + 0 = A$ (0 es la matriz nula)
2. Propiedad conmutativa: $A + B = B + A$
3. Propiedad asociativa: $A + (B + C) = (A + B) + C$
4. Matriz opuesta: Es la matriz que se obtiene cambiando todos los signos de la matriz A, se denota con $-A$. La suma de una matriz con su opuesta es cero, $A + (-A) = 0$.

La diferencia de matrices A y B se representa por $A-B$, y se define como: $A-B = A + (-B)$.

Ejercicio 5: dadas las matrices A, B y C calcular las siguientes operaciones:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

a) $A+B=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

b) $A-B-C=\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

c) $3A+5B-6C=\begin{pmatrix} 29 & -15 \\ 7 & -25 \end{pmatrix}$

Producto de una matriz por un número. El producto de una matriz A= (a_{ij}) por un número real k es otra matriz B= (b_{ij}) de la misma dimensión que A y tal que cada elemento b_{ij} de B se obtiene multiplicando a_{ij} por k, es decir, $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$.

Si k=5 y B=kA,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 9 \\ 6 & 7 & 8 \\ 4 & 6 & 7 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} (5\times 3) & (5\times 0) & (5\times 9) \\ (5\times 6) & (5\times 7) & (5\times 8) \\ (5\times 4) & (5\times 6) & (5\times 7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 0 & 45 \\ 30 & 35 & 40 \\ 20 & 30 & 35 \end{bmatrix}$$

El producto de la matriz A por el número real k se designa por k·A. Al número real k se le llama también escalar, y a este producto, producto de escalares por matrices.

Propiedades del producto de una matriz por un escalar

1. Propiedad distributiva:

   $k\,(A + B) = k\,A + k\,B$

   $(k + h)A = k\,A + h\,A$ (k y h son escalares)

2. Propiedad asociativa mixta: $k\,[h\,A] = (k\,h)\,A$

3. Elemento unidad: $1 \cdot A = A$

Propiedades simplificativas

1. $A + C = B + C \Leftrightarrow A = B$.

2. $k\,A = k\,B \Leftrightarrow A = B$ si k es diferente de 0.

3. $k\,A = h\,A \Leftrightarrow h = k$ si A es diferente de 0.

Producto de matrices. Dadas dos matrices A y B, su producto es otra matriz P cuyos elementos se obtienen multiplicando las filas de A por las columnas de B elemento a elemento. Es evidente que el número de columnas de A debe coincidir con el número de filas de B. Es más, si A tiene dimensión $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$ y B dimensión $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{r}$, la matriz P será de orden $\boldsymbol{m}\times \boldsymbol{r}$.

$$p_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \qquad \begin{array}{l} i = 1,\ldots m \\ j = 1,\ldots r \end{array}$$

$$A_{2x3} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 8 & 6 & -3 \end{bmatrix} \qquad B_{3x1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$C_{2x1} = A_{2x3} \times B_{3x1} \therefore c_{ij} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} b_{kj} \qquad \begin{matrix} i = 1,2 \\ j = 1 \end{matrix}$$

$$c_{11} = \sum_{k=1}^{3} a_{1k} b_{k1} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}$$

$$c_{11} = (2 \times 3) + (4 \times 4) + (0 \times 9) = 22$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{2 \quad 4 \quad 0} \\ 8 \quad 6 \quad -3 \end{bmatrix} \quad \boxed{\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}}$$

$$c_{21} = \sum_{k=1}^{3} a_{2k} b_{k1} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31}$$

$$c_{21} = (8 \times 3) + (6 \times 4) + (-3 \times 9) = 21$$

$$\begin{bmatrix} 2 \quad 4 \quad 0 \\ \boxed{8 \quad 6 \quad -3} \end{bmatrix} \quad \boxed{\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}}$$

$$C_{21} = \begin{bmatrix} 22 \\ 21 \end{bmatrix}$$

Resulta más sencillo comprender el producto de matrices a partir de varios ejemplos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot1 + 2\cdot0 + 3\cdot(-1) \\ 4\cdot1 + 5\cdot0 + 6\cdot(-1) \\ 7\cdot1 + 8\cdot0 + 9(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$3 \times 3 \qquad 3 \times 1 \qquad\qquad\qquad\qquad 3 \times 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot1 + 2(-1) + 3\cdot3 & 1\cdot0 + 2\cdot2 + 3\cdot(-4) \\ 4\cdot1 + 5\cdot(-1) + 6\cdot3 & 4\cdot0 + 5\cdot2 + 6\cdot(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -8 \\ 17 & -14 \end{pmatrix}$$

$$2 \times 3 \qquad 3 \times 2 \qquad\qquad\qquad\qquad 2 \times 2$$

Propiedades del producto de matrices

1. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
2. El producto de matrices en general no es conmutativo.

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42 & 17 \\ -30 & -40 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 49 \\ 18 & -16 \end{bmatrix}$$

3. Si A es una matriz cuadrada de orden n se tiene $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$ (I_n es la matriz identidad de orden n).
4. Dada una matriz cuadrada A de orden n, no siempre existe otra matriz B tal que $A \cdot B = B \cdot A = I_n$. Si existe dicha matriz B, se dice que es la matriz inversa de A y se representa por A^{-1} .
5. El producto de matrices es distributivo respecto de la suma de matrices, es decir: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

Consecuencias de las propiedades

1. Si A·B= 0 no implica que A=0 ó B=0.

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Si A·B=A·C no implica que B = C.

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 9 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. En general $(A+B)^2 \neq A^2 + B^2 + 2AB$,ya que $A \cdot B \neq B \cdot A$.

4. En general $(A+B)\cdot(A-B) \neq A^2 - B^2$, ya que $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Ejercicio7: ver todos los productos posibles con las siguientes matrices y calcularlos:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix}$$

$A\in M_{3x3}$, $B\in M_{3x1}$, $C\in M_{2x3}$, solo posibles los siguientes productos:

$$A\cdot B=\underset{3x3}{\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}}\cdot\underset{3x1}{\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}1+4+3\\ 1+2+1\\ 0+2-1\end{pmatrix}=\underset{3x1}{\begin{pmatrix}8\\ 4\\ 1\end{pmatrix}}$$

$$C\cdot A=\underset{2x3}{\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix}}\cdot\underset{3x3}{\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}2+1+0 & 4+1+0 & 6+1+0\\ 3+4+0 & 6+4+5 & 9+4-5\end{pmatrix}=\underset{2x3}{\begin{pmatrix}3 & 5 & 7\\ 7 & 15 & 8\end{pmatrix}}$$

$$C\cdot B=\underset{2x3}{\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix}}\cdot\underset{3x1}{\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}2+2++0\\ 3+8+5\end{pmatrix}=\underset{2x1}{\begin{pmatrix}4\\ 16\end{pmatrix}}=4\cdot\begin{pmatrix}1\\ 4\end{pmatrix}$$

Ejercicio 8: multiplicar A·B y B·A, ¿Qué ocurre?

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 6 & 8\\ 20 & 12 & 14\\ 32 & 18 & 20\end{pmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & -6 & -6\\ 2 & 4 & 6\\ 30 & 36 & 42\end{pmatrix}$$

Matrices invertibles. Una matriz cuadrada que posee inversa se dice que es invertible.

Propiedades de las matrices invertibles.

1. La matriz inversa, si existe, es única.

2. $A^{-1}A = A \cdot A^{-1} = I$

3. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

4. $(A^{-1})^{-1} = A$

5. $(kA)^{-1} = (1/k \cdot A^{-1})$

6. $(A^{t})^{-1} = (A^{-1})^{t}$

Observación. Existen matrices que cumplen $A \cdot B = I$, pero que $B \cdot A \neq I$, en tal caso, se dice que A es la inversa de B “por la izquierda” o que B es la inversa de A “por la derecha”.

El método más sencillo para el cálculo de la inversa lo veremos en el tema siguiente, cuando definamos el determinante de las matrices.

Para matrices 2x2 podemos calcular la inversa a partir de la definición:

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2x + 2z & 2y + 2t \\ 3x + 7z & 3y + 7t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tenemos 4 ecuaciones con 4 incógnitas, que podemos agruparlas en dos sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\left.\begin{array}{l} (1)\ 2x+2z=1 \\ (2)\ 2y+2t=0 \\ (3)\ 3x+7z=0 \\ (4)\ 3y+7t=1 \end{array}\right\}$$

Las soluciones son x=7/8, y=-1/4, z=-3/8 y t=1/4, con lo que $A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

Ejercicio

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 12 \\ 4 & -10 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$2a$

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$.

Solución x=t=0 y=1/2 z=1 → $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

Luego la matriz A no tiene inversa.

No es invertible

Resolución de ecuaciones.

Tenemos que obtener la matriz incógnita, que generalmente se denota como X, despejándola de la igualdad. Para conseguirlo tenemos las siguientes reglas:

1) Si una matriz está sumando a un lado de la igualdad pasa restando al otro lado de la igualdad y al revés.

$X+B=C \rightarrow X=C-B$

$X-B=C \rightarrow X=C+B$

2) Si multiplicamos una matriz por la izquierda a un lado de la igualdad también lo tenemos que hacer en el otro lado de la igualdad por la izquierda. Igual por la derecha.

$A\cdot X=B \rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot B \rightarrow Id\cdot X=A^{-1}\cdot B \rightarrow X=A^{-1}\cdot B$

$X\cdot A=B \rightarrow X\cdot A\cdot A^{-1}=B\cdot A^{-1} \rightarrow X\cdot Id=B\cdot A^{-1} \rightarrow X=B\cdot A^{-1}$

Resumen de propiedades.

Suma de matrices y multiplicación de un escalar por una matriz:

1. $A+B=B+A$

2. $A+\left(B+C\right)=\left(A+B\right)+C$

3. $\alpha\left(A+B\right)=\alpha A+\alpha B$

4. $\left(\alpha+\beta\right)A=\alpha A+\beta A$

5. $\alpha\left(\beta A\right)=\left(\alpha\beta\right)A$

6. $A+0=A$

7. $A+\left(-A\right)=0$

Donde "0" es la matriz nula

Multiplicación de matrices:

1. $A\left(B+C\right)=AB+AC$

2. $\left(A+B\right)C=AC+BC$

3. $A\left(BC\right)=\left(AB\right)C$

4. $\alpha\left(AB\right)=\left(\alpha A\right)B=A\left(\alpha B\right)$

5. $A0_n=0_nA=0_n$

6. $BI_n=I_nB=B$

7. En general, $AB\neq BA$ (la multiplicación no es conmutativa)

8. $AB=0$ no implica necesariamente que $A=0$ ó $B=0$

9. $AB=AC$ no implica necesariamente que $B=C$

Propiedades de la inversa:

1. A^{-1} es única
2. $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$
3. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
4. $(\alpha A)^{-1} = \dfrac{1}{\alpha} A^{-1} \quad \forall\, \alpha \neq 0$
5. $\left(A^{n}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{n}$
6. $\left(A^{T}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{T}$

Propiedades de la transpuesta:

1. $\left(A^{T}\right)^{T} = A$
2. $(A+B)^{T} = A^{T} + B^{T}$
3. $(AB)^{T} = B^{T}A^{T}$
4. $(\alpha A)^{T} = \alpha A^{T}$