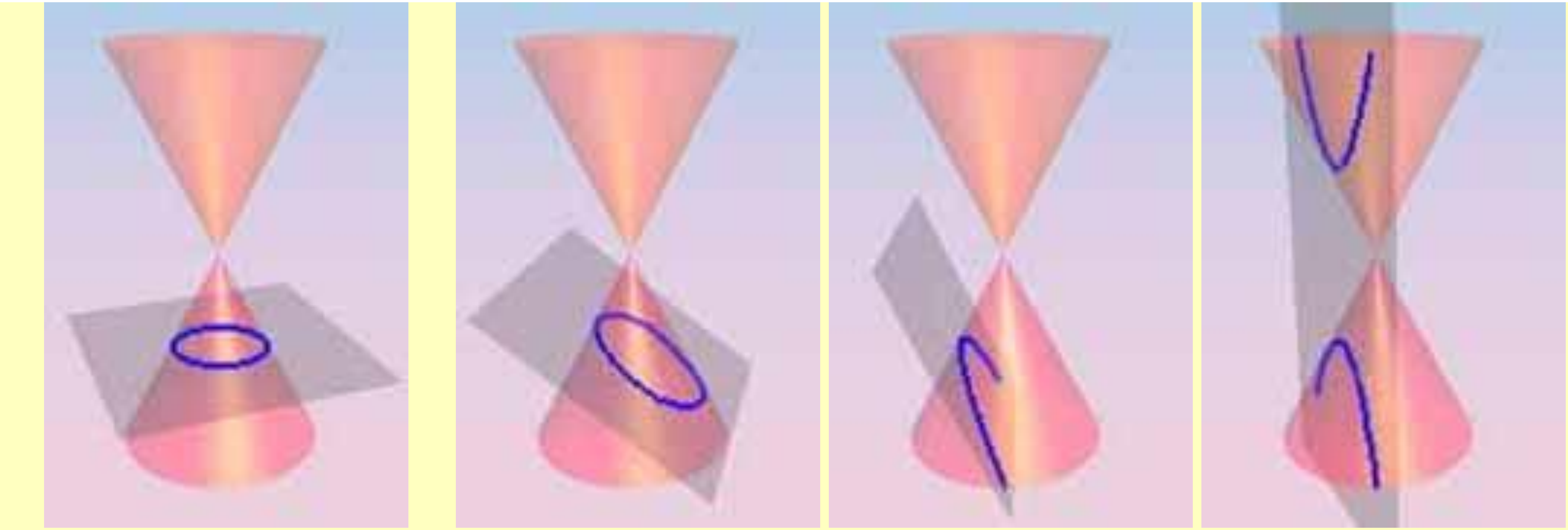
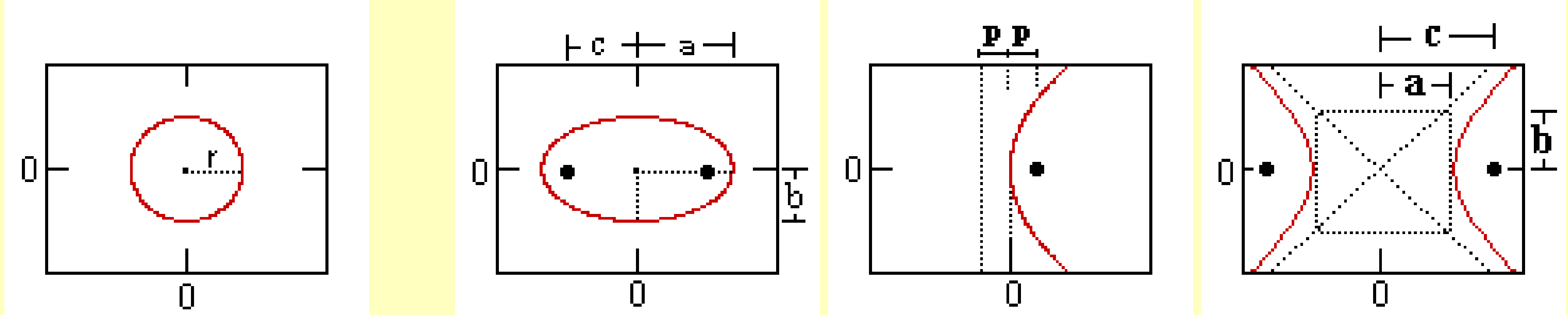
Cónicas

Se denomina sección cónica a la curva intersección de un cono con un plano que no pasa por su vértice.

Cambiando el ángulo y el lugar de la intersección, podemos crear un circunferencia, un elipse, una parábola o una hipérbola.

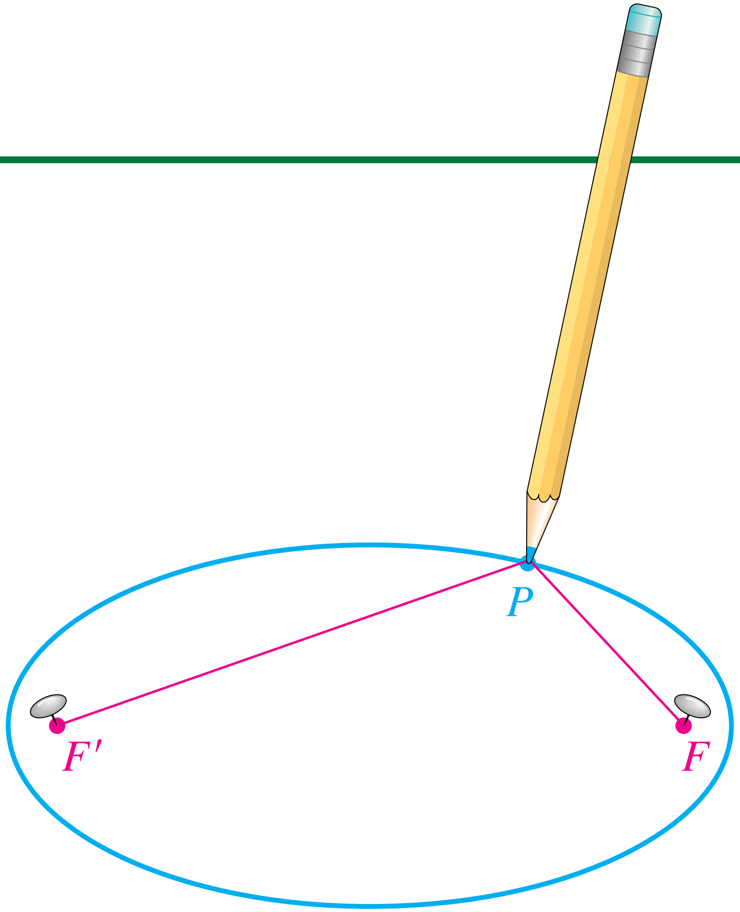


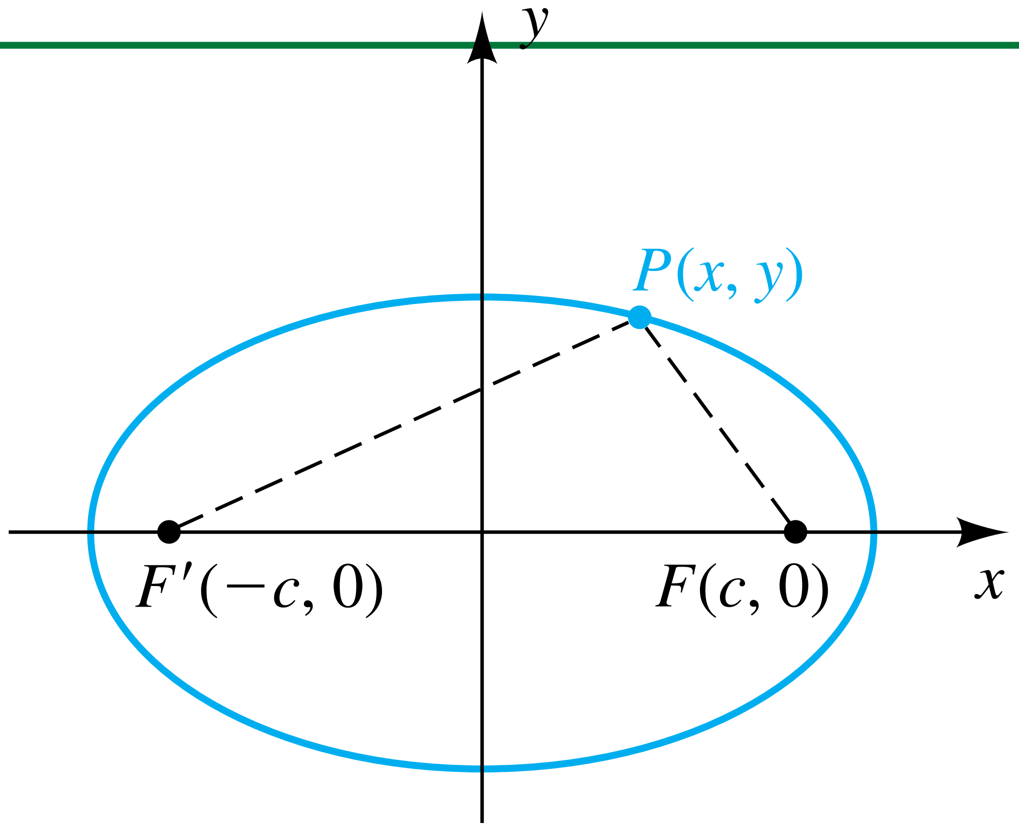
Círculo | Elipse (h) | Parábola (h) | Hipérbola (h)



Definición de una elipse

Una **elipse** es el conjunto de todos los puntos en un plano, la suma de cuyas distancias desde dos puntos fijos (los **focos**) en el plano es una constante positiva.



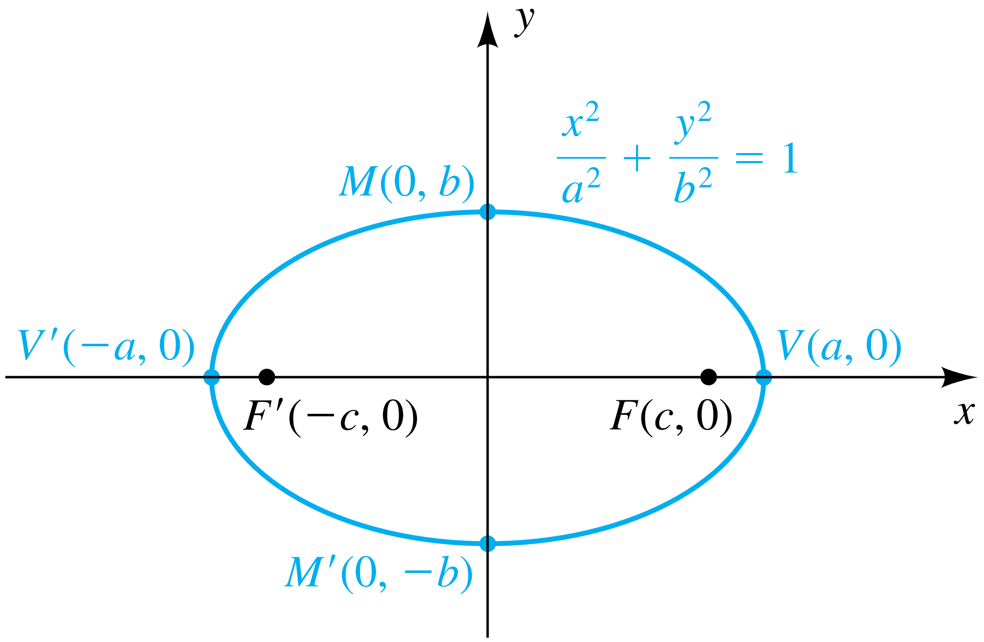


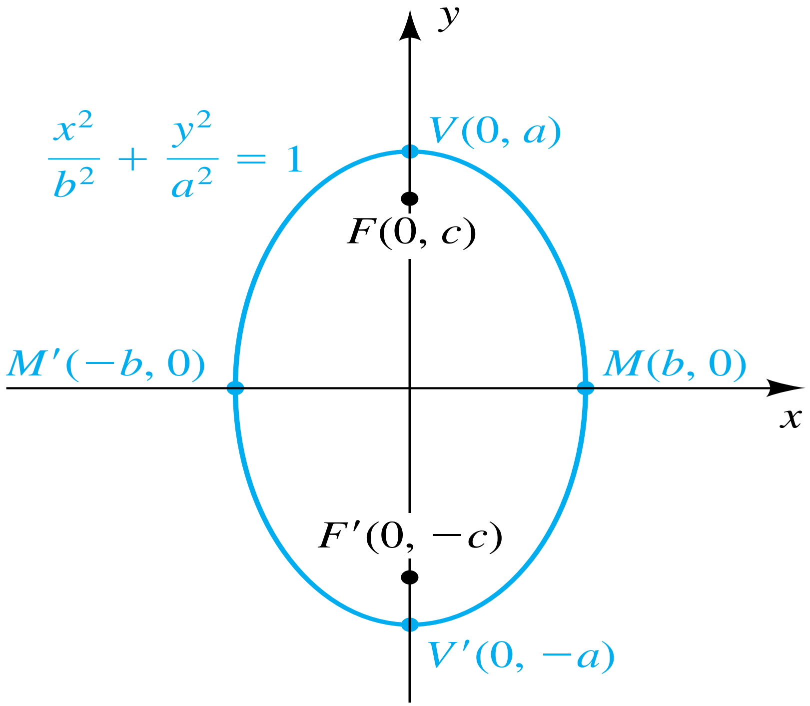
Ecuaciones estándar de una elipse con centro en el origen

La gráfica de

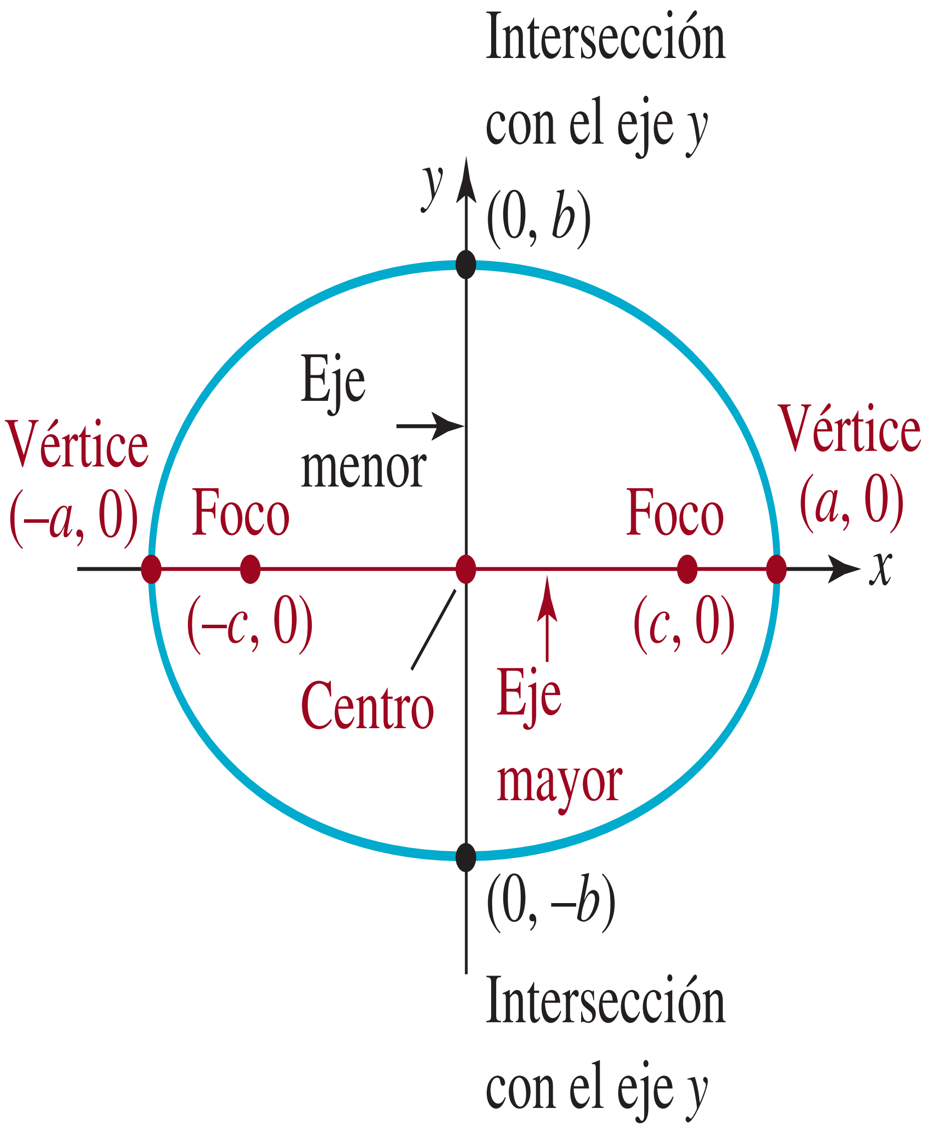
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{o} \qquad \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

donde $a > b > 0$, es una elipse con centro en el origen. La longitud del eje mayor es $2a$, y la longitud del eje menor es $2b$. Los focos están a una distancia c del origen, donde $c^2 = a^2 - b^2$.

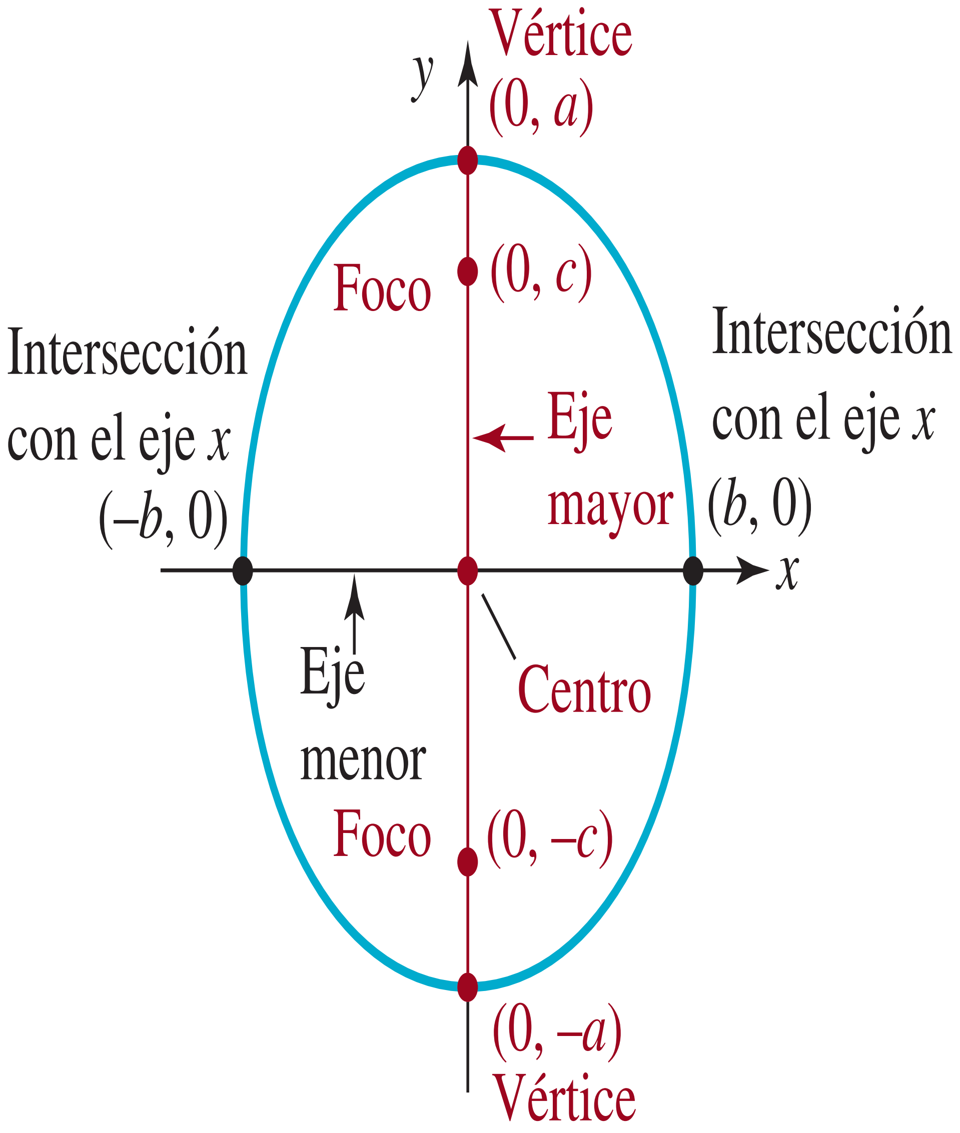




Resumen gráfico de la información de las formas normales (4) y (5)



$a)\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, a>b$



$b)\ \dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1, a>b$

Elipse con centro en (h, k) Cuando el centro está en (h, k), la **forma normal** de la ecuación de la elipse puede ser

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \tag{6}$$

o bien

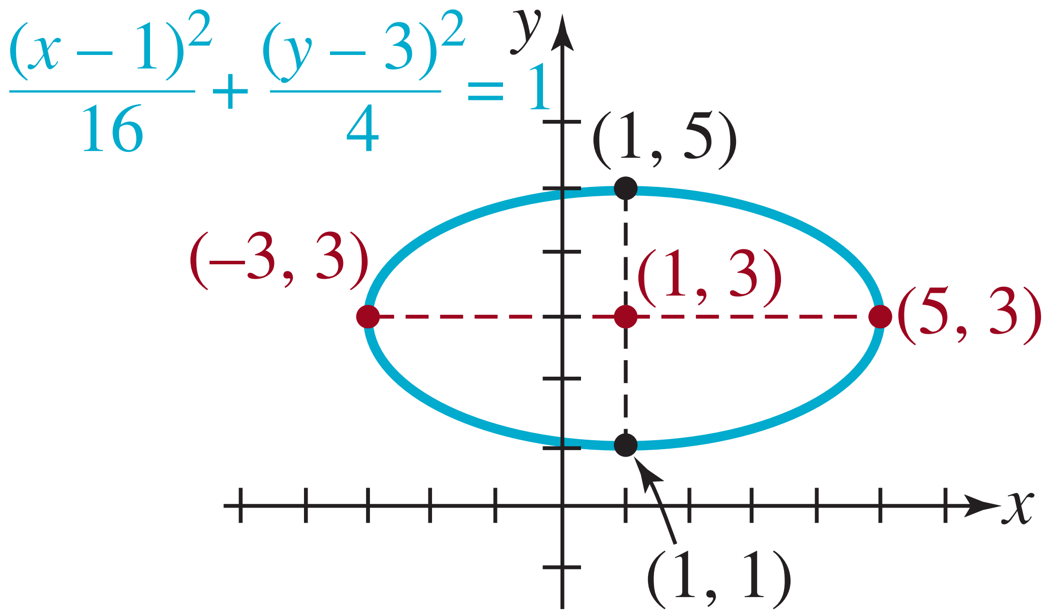
$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1. \tag{7}$$

Las elipses definidas por estas ecuaciones tienen forma idéntica a las definidas por las ecuaciones (4) y (5), ya que las ecuaciones (6) y (7) representan transformaciones rígidas de las gráficas de (4) y (5). Por ejemplo, la elipse

$$\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y+3)^2}{16}=1$$

tiene su centro en $(1, -3)$. Su gráfica es la de $x^2/9 + y^2/16 = 1$, trasladada horizontalmente una unidad hacia la derecha, y después por una traslación vertical de tres unidades hacia abajo.

$$\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y-3)^2}{4}=1.$$



Elementos de la elipse

Focos Son los puntos fijos **F y F'**.

Eje focal Es la recta que pasa por los focos.

Eje secundario Es la mediatriz del segmento FF'.

Centro Es el punto de intersección de los ejes.

Radios vectores Son los segmentos que van desde un punto de la elipse a los focos: **PF** y **PF'**.

Distancia focal Es el segmento $\overline{FF'}$ de longitud **2c**, **c** es el valor de la **semidistancia focal**.

Vértices Son los puntos de intersección de la elipse con los ejes: A, A', B y B'.

Eje mayor Es el segmento $\overline{AA'}$ de longitud **2a**, **a** es el valor del **semieje mayor**.

Eje menor Es el segmento $\overline{BB'}$ de longitud **2b**, **b** es el valor del **semieje menor**.

Ejercicio:

Encontrar los elementos de las siguientes Ecuaciones.

(focos, ejes, vértices, intersección con los ejes, gráfica)

1 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

2 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

9 $\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y+4)^2}{9} = 1$

10 $\frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$

69 $\frac{x^2}{2.9} + \frac{y^2}{2.1} = 1;$ $\frac{x^2}{4.3} + \frac{(y-2.1)^2}{4.9} = 1$

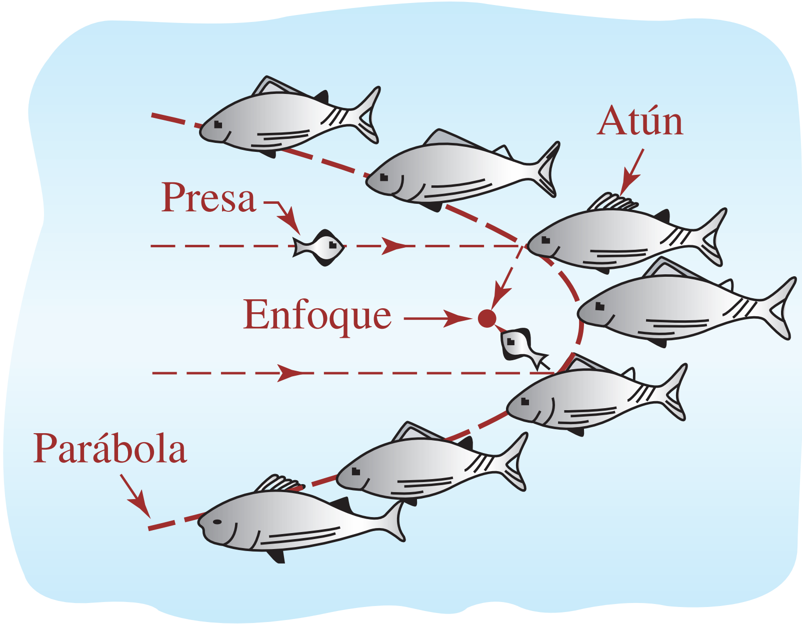
70 $\frac{x^2}{3.9} + \frac{y^2}{2.4} = 1;$ $\frac{(x+1.9)^2}{4.1} + \frac{y^2}{2.5} = 1$

71 $\frac{(x+0.1)^2}{1.7} + \frac{y^2}{0.9} = 1;$ $\frac{x^2}{0.9} + \frac{(y-0.25)^2}{1.8} = 1$

72 $\frac{x^2}{3.1} + \frac{(y-0.2)^2}{2.8} = 1;$ $\frac{(x+0.23)^2}{1.8} + \frac{y^2}{4.2} = 1$

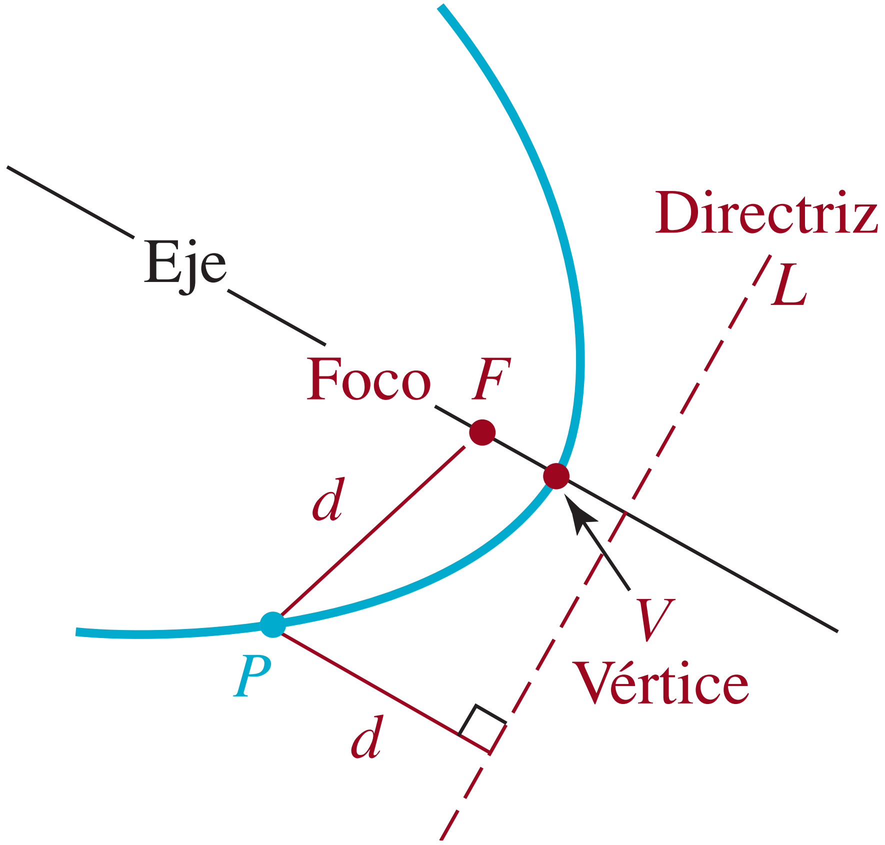
La Parábola.

Antenas parabólicas de TV satelital



Definición 11.1.1 Parábola

Una **parábola** es el conjunto de puntos $P(x, y)$ en el plano que son equidistantes a una recta fija L, llamada **directriz**, y a un punto fijo F, llamado **foco**.



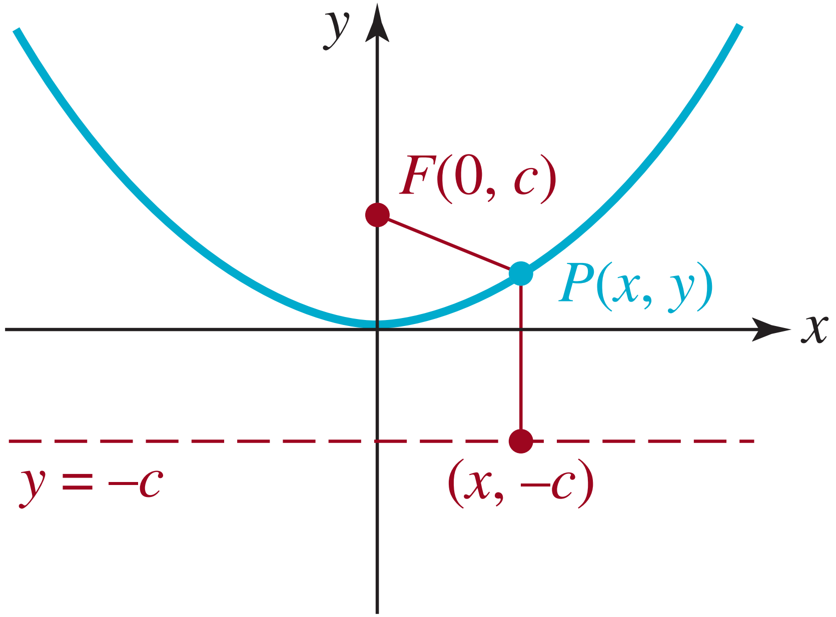
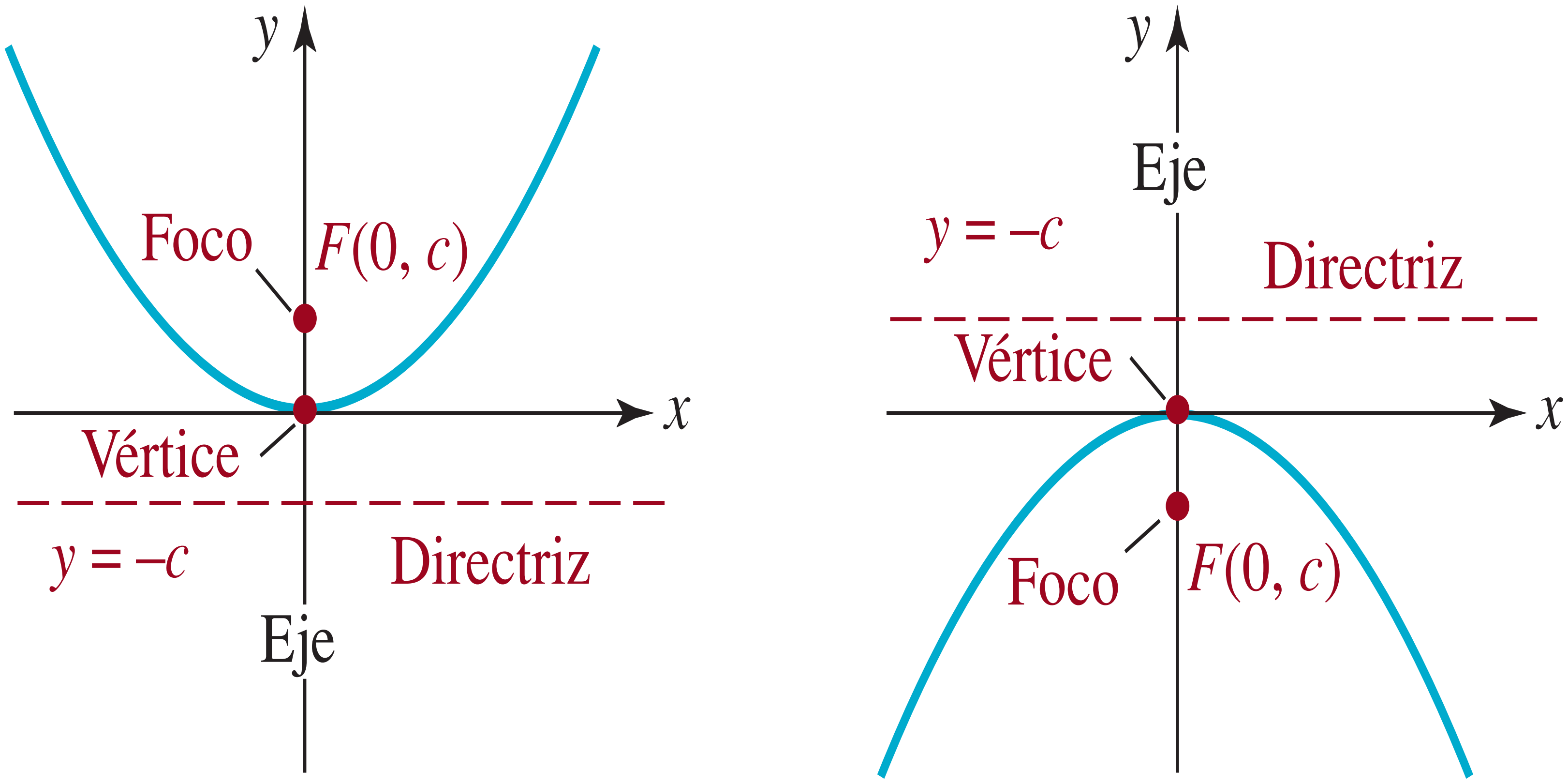


FIGURA 11.1.3 Parábola con vértice en (0, 0) y foco en el eje y

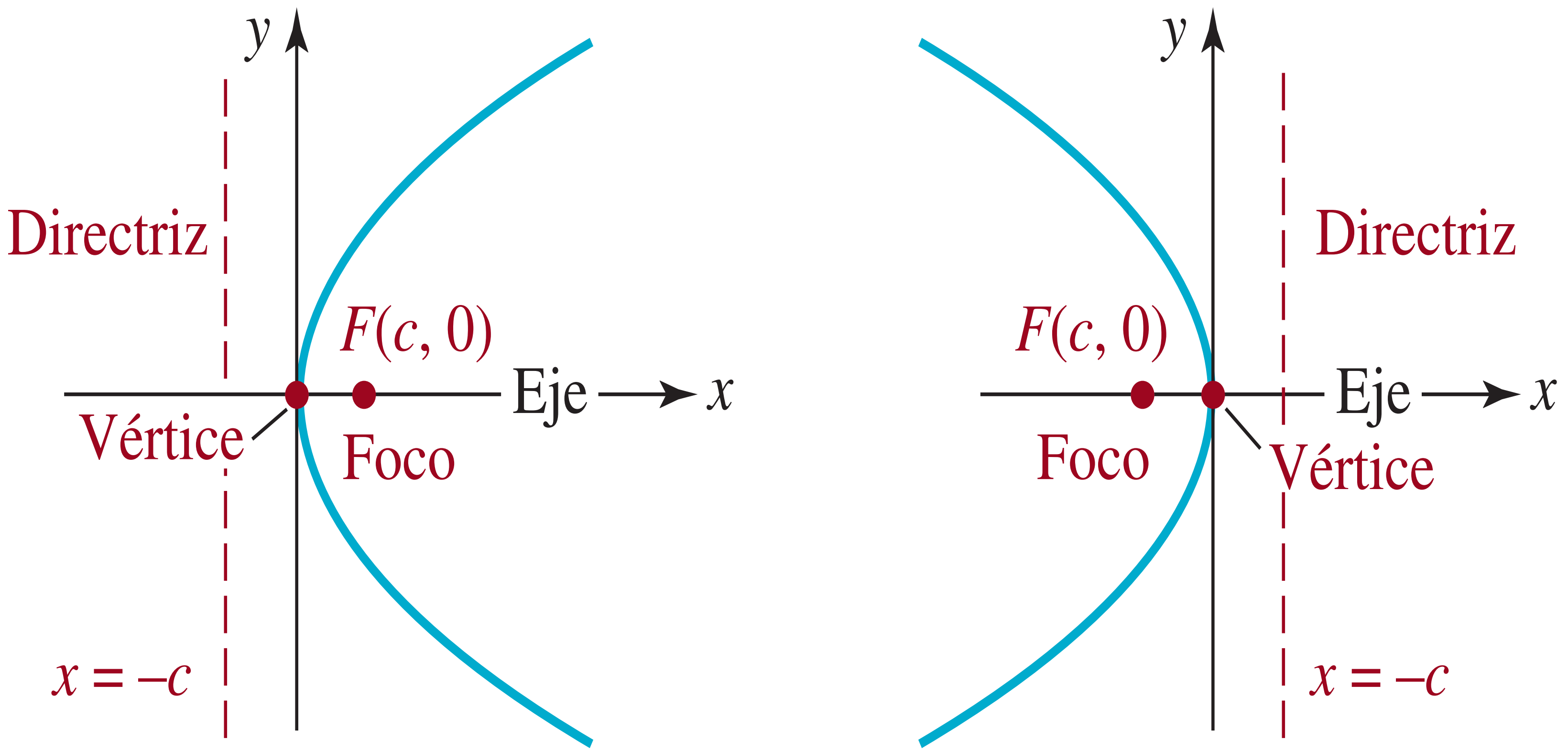
Resumen gráfico de la información de la forma normal (1)



a) $x^2 = 4cy,\ c > 0$ *b*) $x^2 = 4cy,\ c < 0$

FIGURA 11.1.4 Resumen gráfico de la información de la forma normal (1)

Resumen gráfico de la información de la forma normal (2)



a) $y^2 = 4cx$, $c > 0$ *b*) $y^2 = 4cx$, $c < 0$

FIGURA 11.1.5 Resumen gráfico de la información de la forma normal (2)

Obs:

Lado recto: Es la cuerda perpendicular al eje focal y que pasa por el foco. Su longitud es una de las características importantes de la parábola y es igual a $\boldsymbol{4p}$. Ver figura 5.2.

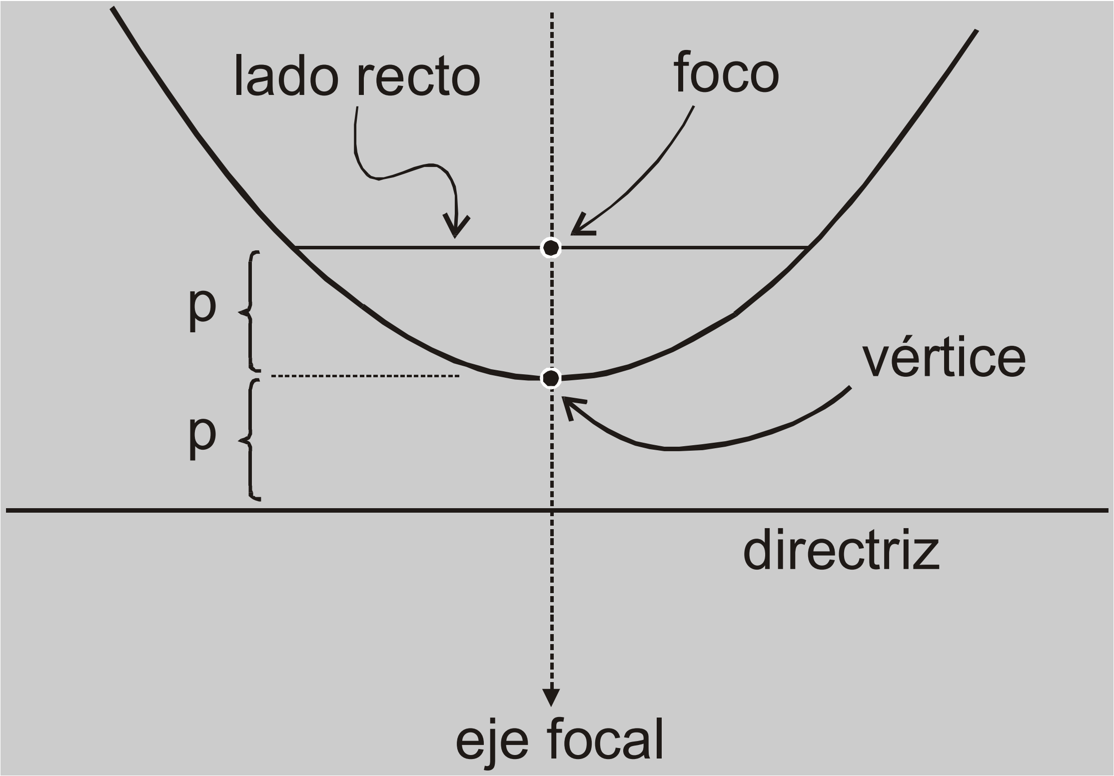
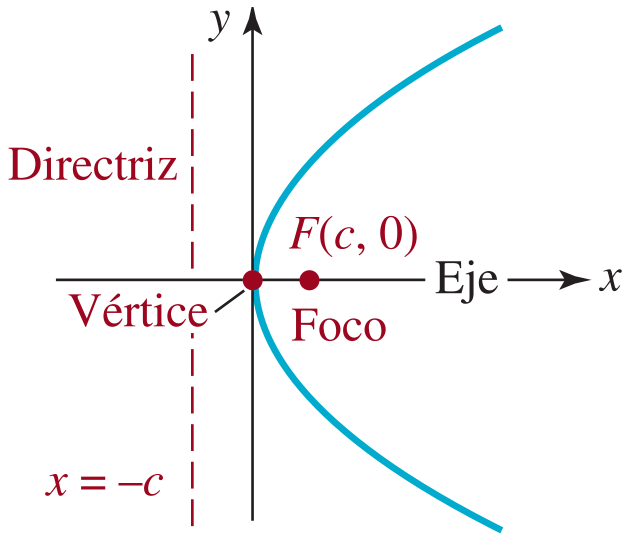


figura 5.2

Elementos de la parábola:

Encontrar los elementos (vértice, foco, directriz y grafica)

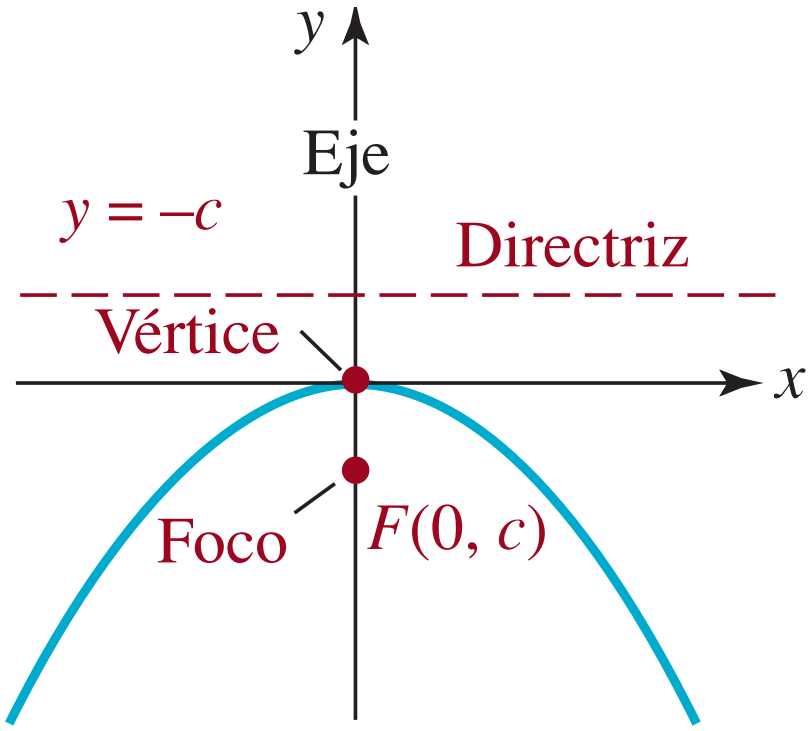
De la parábola $y^2 = 20x$



a) $y^2 = 4cx,\ c > 0$

Encontrar los elementos (vértice, foco, directriz y grafica)

De la parábola $x^2 = -32y$



$b)\ x^2 = 4cy,\ c < 0$

■ Parábola con vértice en (h, k) Supongamos que la parábola se traslada tanto horizontal como verticalmente, de modo que su vértice está en el punto (h, k), y su eje es la recta vertical $x = h$. La **forma normal** de la ecuación de la parábola es, entonces,

$$(x - h)^2 = 4c(y - k). \tag{3}$$

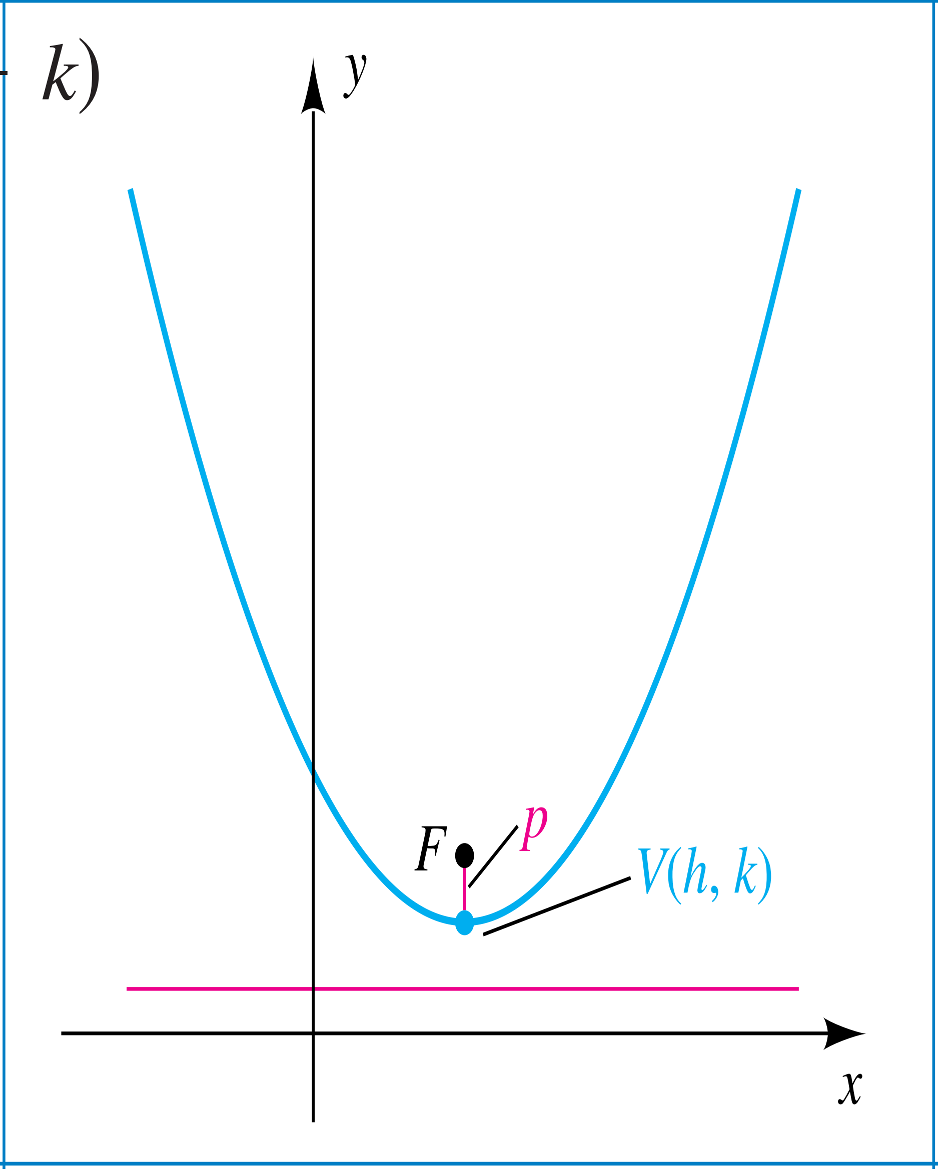
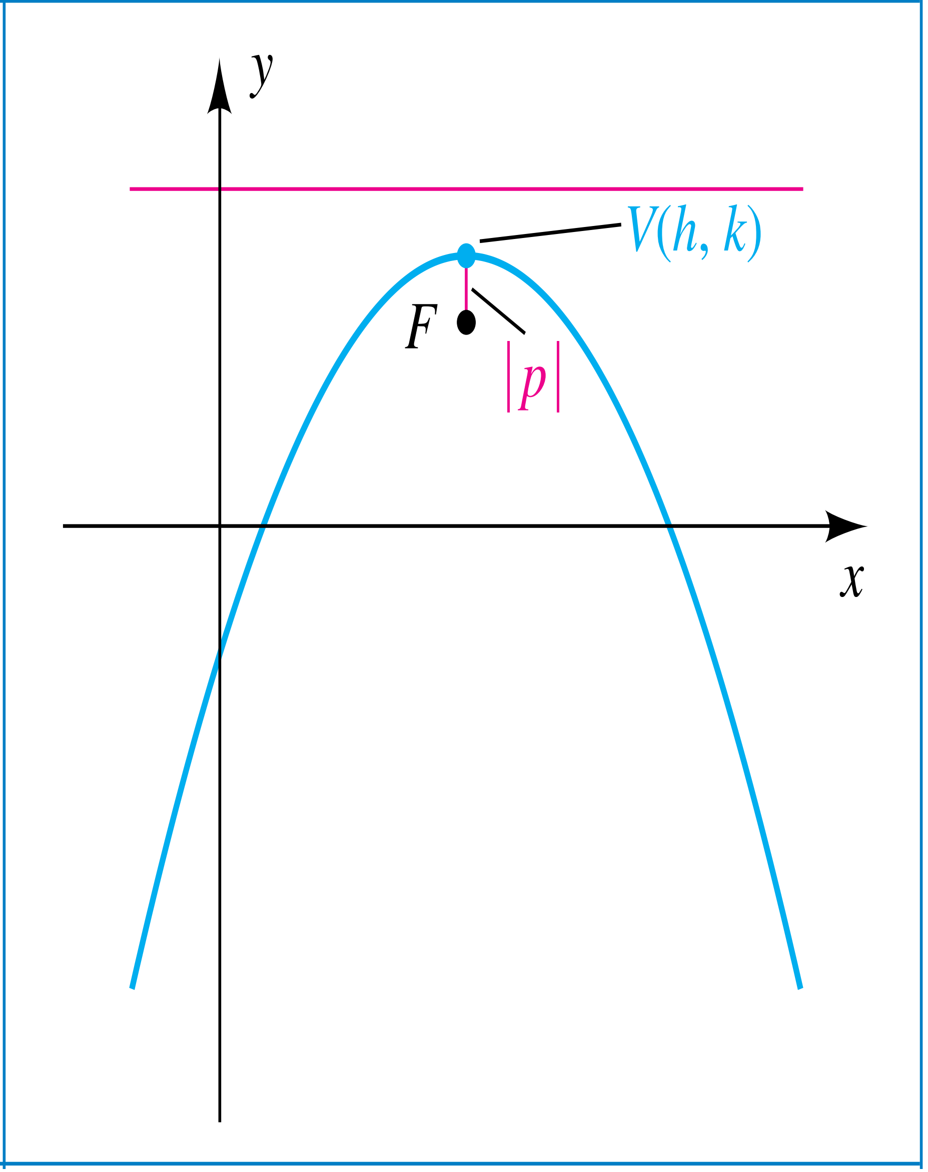
De igual modo, si su eje es la recta horizontal $y = k$, la forma normal de la ecuación de la parábola con vértice en (h, k) es

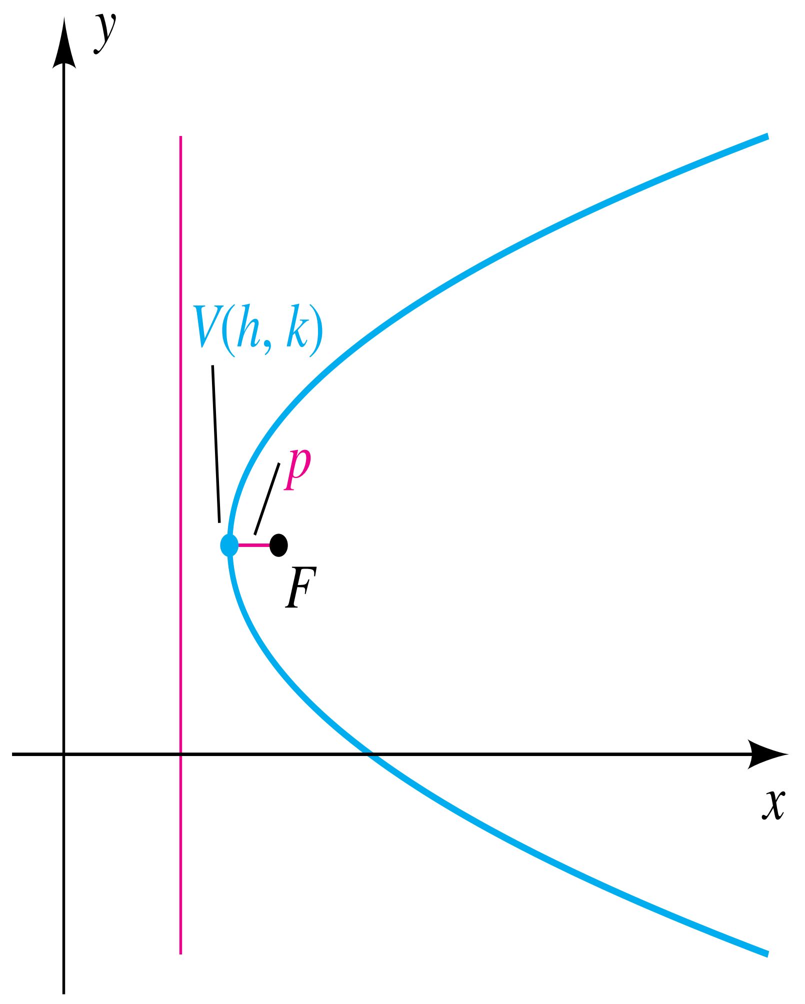
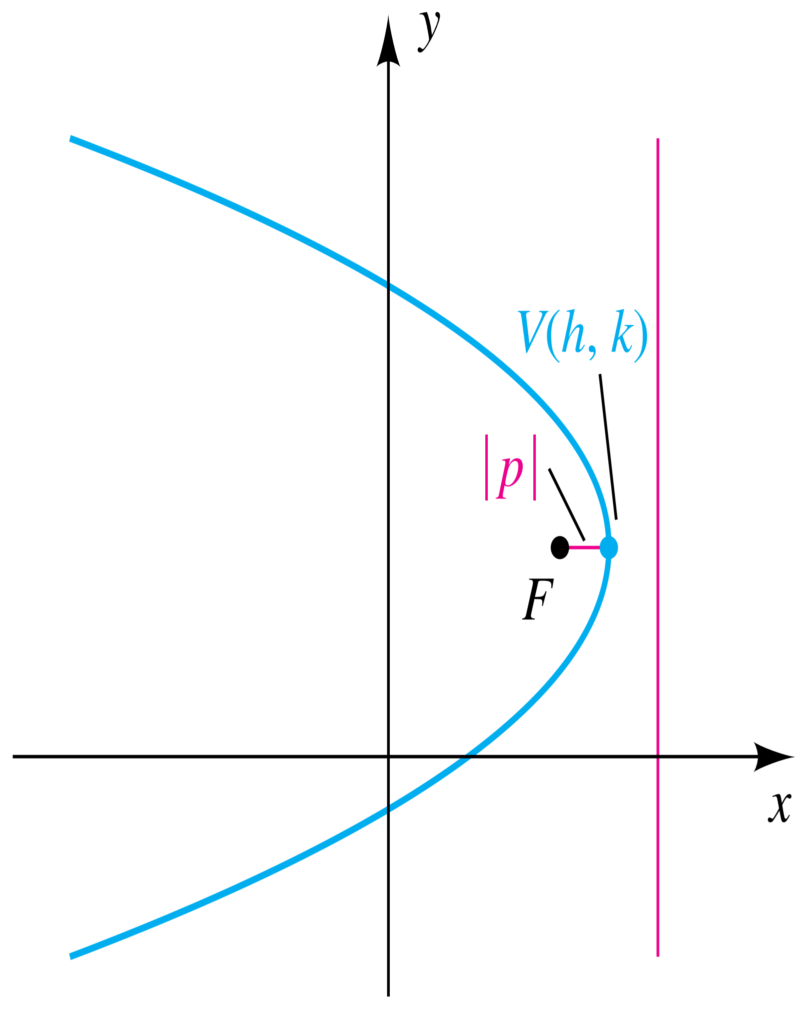
$$(y - k)^2 = 4c(x - h). \tag{4}$$

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

Foco: $F(h, k + p)$

Directriz: $y = k - p$

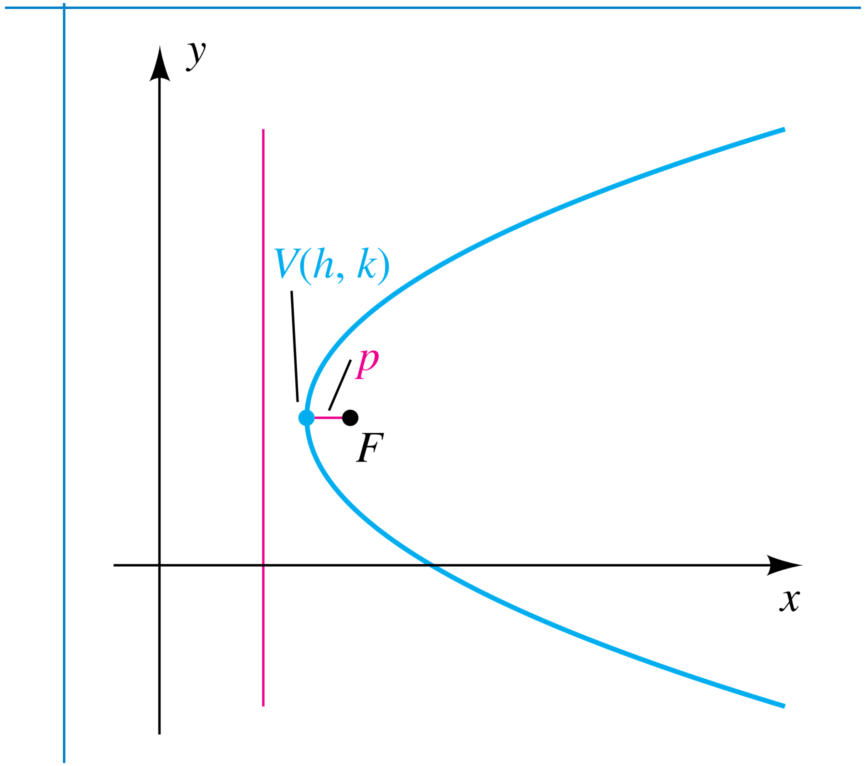
Gráfica para $p > 0$	Gráfica para $p < 0$
	

Ecuación, foco, directriz	Gráfica para $p > 0$	Gráfica para $p < 0$
$(y - k)^2 = 4p(x - h)$ Foco: $F(h + p, k)$ Directriz: $x = h - p$		

Elementos de la parábola:

Encontrar los elementos (vértice, foco, directriz y grafica)

De la parábola $(y-1)^2 = 20(x-2)$



$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

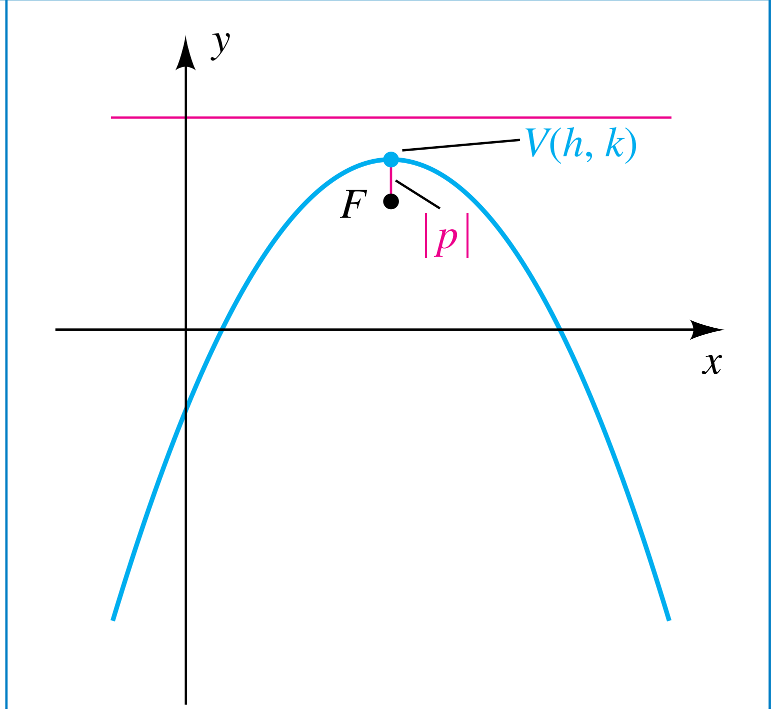
Foco: $F(h+p, k)$

Directriz: $x = h - p$

Encontrar los elementos (vértice, foco, directriz y grafica)

De la parábola $(x-2)^2 = -8(y+4)$

Gráfica para $p < 0$



$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

Foco: $F(h, k+p)$

Directriz: $y = k - p$

Ejercicios

Encontrar los elementos
(vértice, foco, directriz y grafica)

1 $8y = x^2$

2 $x^2 = -3y$

3 $2y^2 = -3x$

4 $20x = y^2$

5 $(x + 2)^2 = -8(y - 1)$

6 $(x - 3)^2 = \frac{1}{2}(y + 1)$

7 $(y - 2)^2 = \frac{1}{4}(x - 3)$

8 $(y + 1)^2 = -12(x + 2)$

Ejercicios

Dado el cuadrilátero de vértices A: $(1,0)$; B: $(-2,-1)$; C: $(1,-3)$ y D: $(4,-2)$, determina:

a. La medida de sus lados.

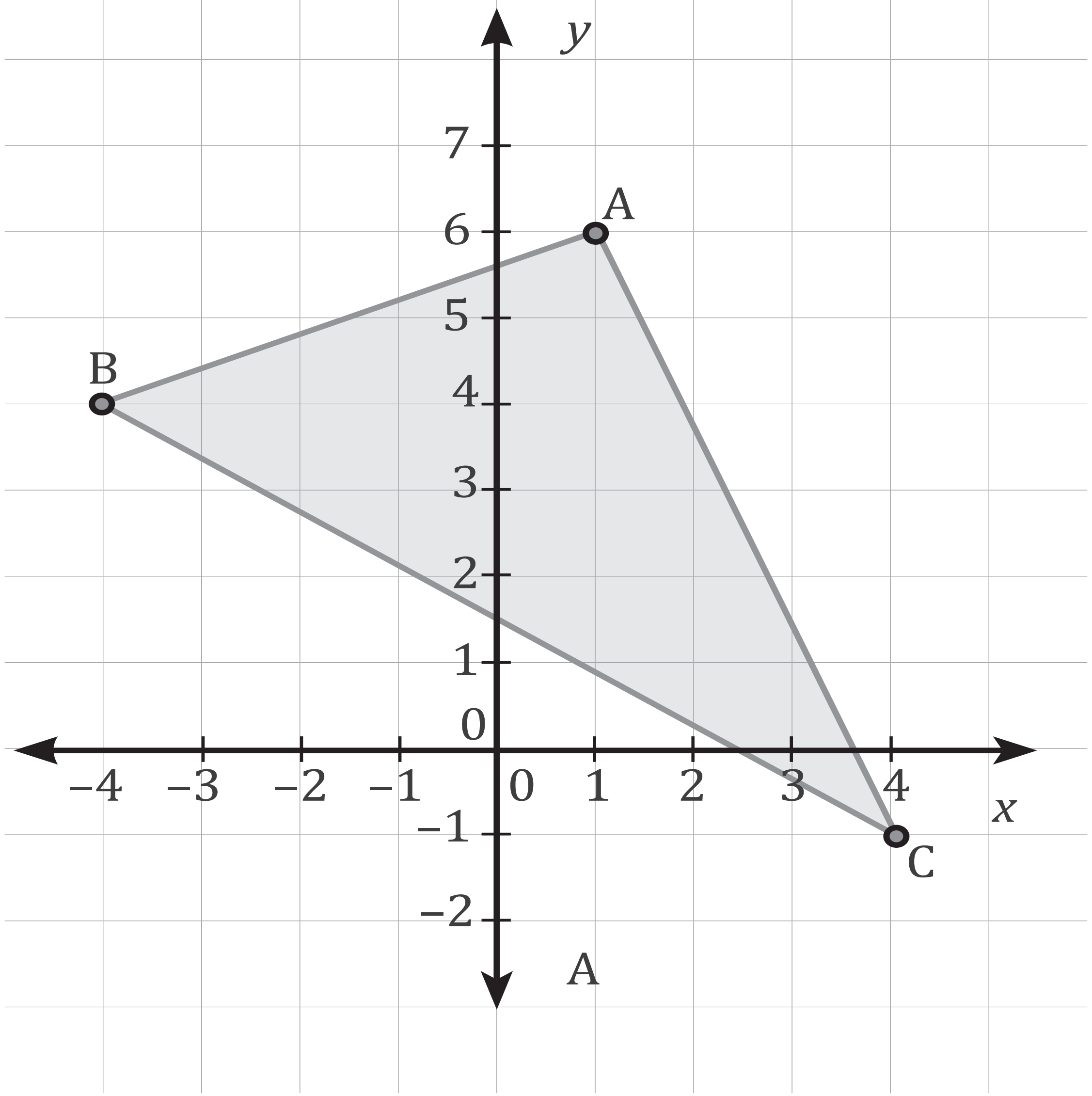
b. La medida de sus diagonales.

c. ¿Podría este cuadrilátero ser un paralelogramo?

Determinar, en cada caso, la ecuación general de la recta que tiene pendiente dada y pasa por el punto señalado:

a. Pendiente: $-\frac{2}{9}$, pasa por el punto $\left(-\frac{3}{2},4\right)$.

b. Pendiente: $\frac{5}{3}$, pasa por el punto $\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{8}\right)$.



a. La ecuación del lado $\overline{BC}$.

b. La ecuación de la simetral

6. Demuestra que el triángulo cuyos vértices son los puntos $A(-2, -1)$, $B(5, -2)$ y $C(2, 2)$ es isósceles.

7. Demuestra que los puntos $A(1, 4)$, $B(4, 0)$ y $C\left(6, \frac{3}{2}\right)$ son los vértices de un triángulo rectángulo. Luego, calcula su área.

8. Demuestra que los puntos $A(3, 3)$, y $B\left(-3\sqrt{3}, 3\sqrt{3}\right)$ $C(-3, -3)$ son los vértices de un triángulo equilátero.

9. Calcula el perímetro y área del triángulo del ejercicio 8.

Determina, en cada caso, lo pedido.

11. La ecuación de la recta que es paralela a $L_1: y = 2x + 3$ y que pasa por $P(3, 4)$.

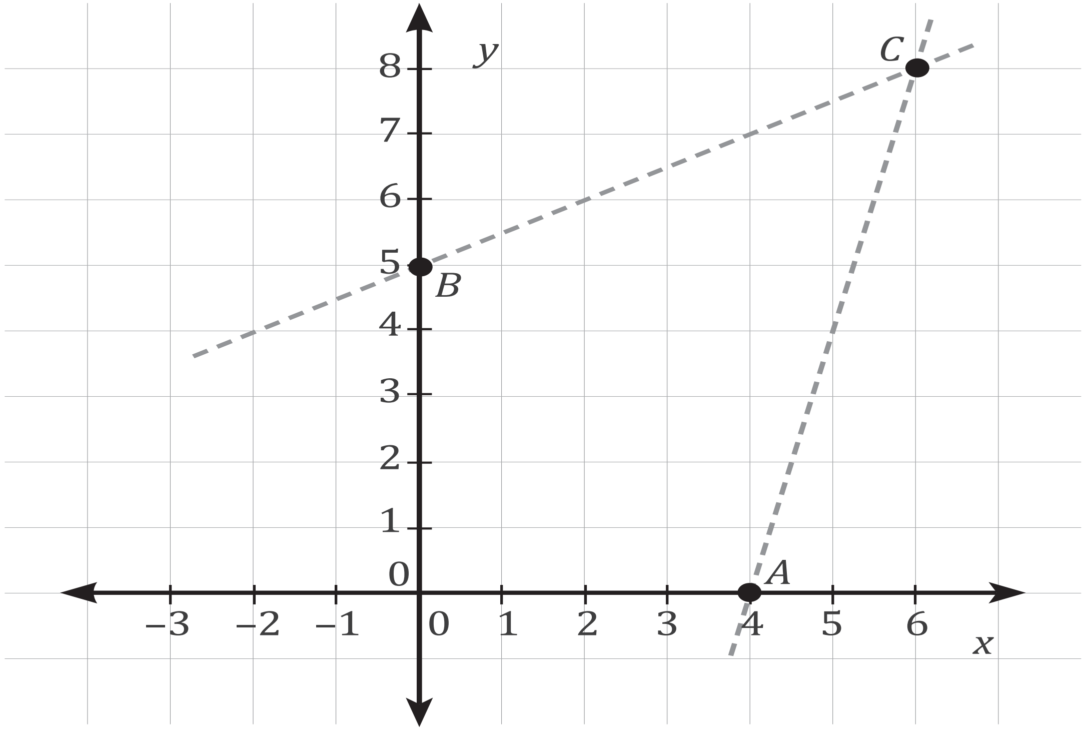
12. La ecuación de la recta que es perpendicular a $L_1: 2x + 4y = 5$ y que pasa por $Q(-1, 2)$.

13. El valor de k para que $L_1: 2x + y = -4$ y $L_2: 3x + ky = -2$ sean paralelas.

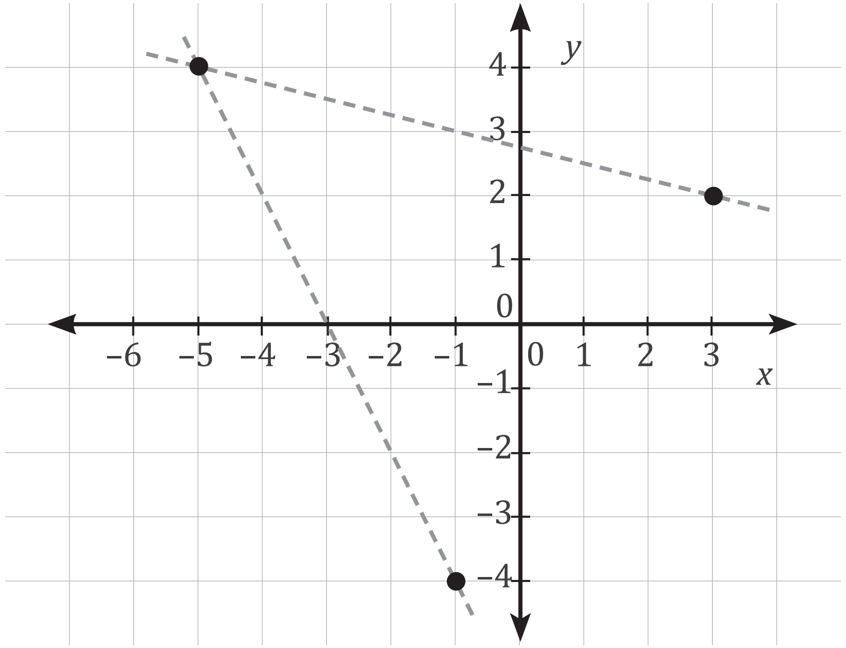
14. El valor de k para que $L_1: 3x + 2y = 1$ y $L_2: kx + 2y = -2$ sean perpendiculares.

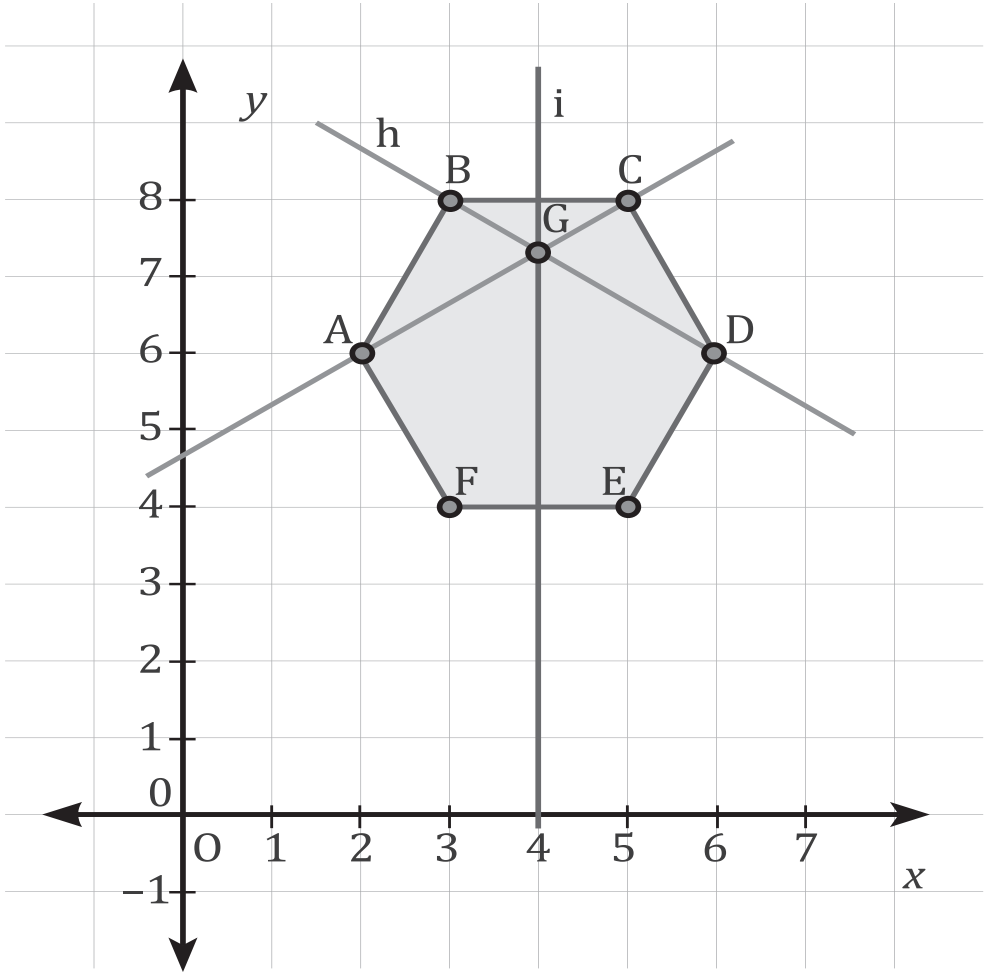
7. Determina, para cada grafico, el sistema de ecuaciones lineales que lo representa algebraicamente. Comprueba, resolviendo el sistema, que el punto de intersección de las rectas es la solución de este:

a.



b.





Según su dibujo, él debe determinar algunos datos para colocar los adornos y tornillos. Haz ahora tú los cálculos que Diego hizo y da las respuestas correctas, determinando:

a. La ecuación de la recta que pasa por A y por C.

b. La ecuación de la recta que pasa por B y por D.

c. Las coordenadas del punto G.

d. La distancia desde G al lado EF. Aproxima tu respuesta a la centésima.