Derivadas

En este tema, además de definir tal concepto, se mostrará su significado y se hallarán las derivadas de las funciones más usuales.

Es de capital importancia dominar la derivación para después poder abordar el trazado de curvas, así como para comprender la utilidad del cálculo integral, que se estudiarán a continuación.

La noción de derivada es históricamente anterior al concepto de límite aunque actualmente se estudie aquélla inmediatamente después de éste, por razones que serán fácilmente comprensibles.

La derivada de una función en un punto x_0 surge del problema de **calcular la tangente a la gráfica** de la función en el punto de abscisa x_0, y fue Fermat el primero que aportó la primera idea al tratar de buscar los máximos y mínimos de algunas funciones.

Definición de Derivadas

La derivada de la función $f(x)$ con respecto a x es la función $f'(x)$ dada por:

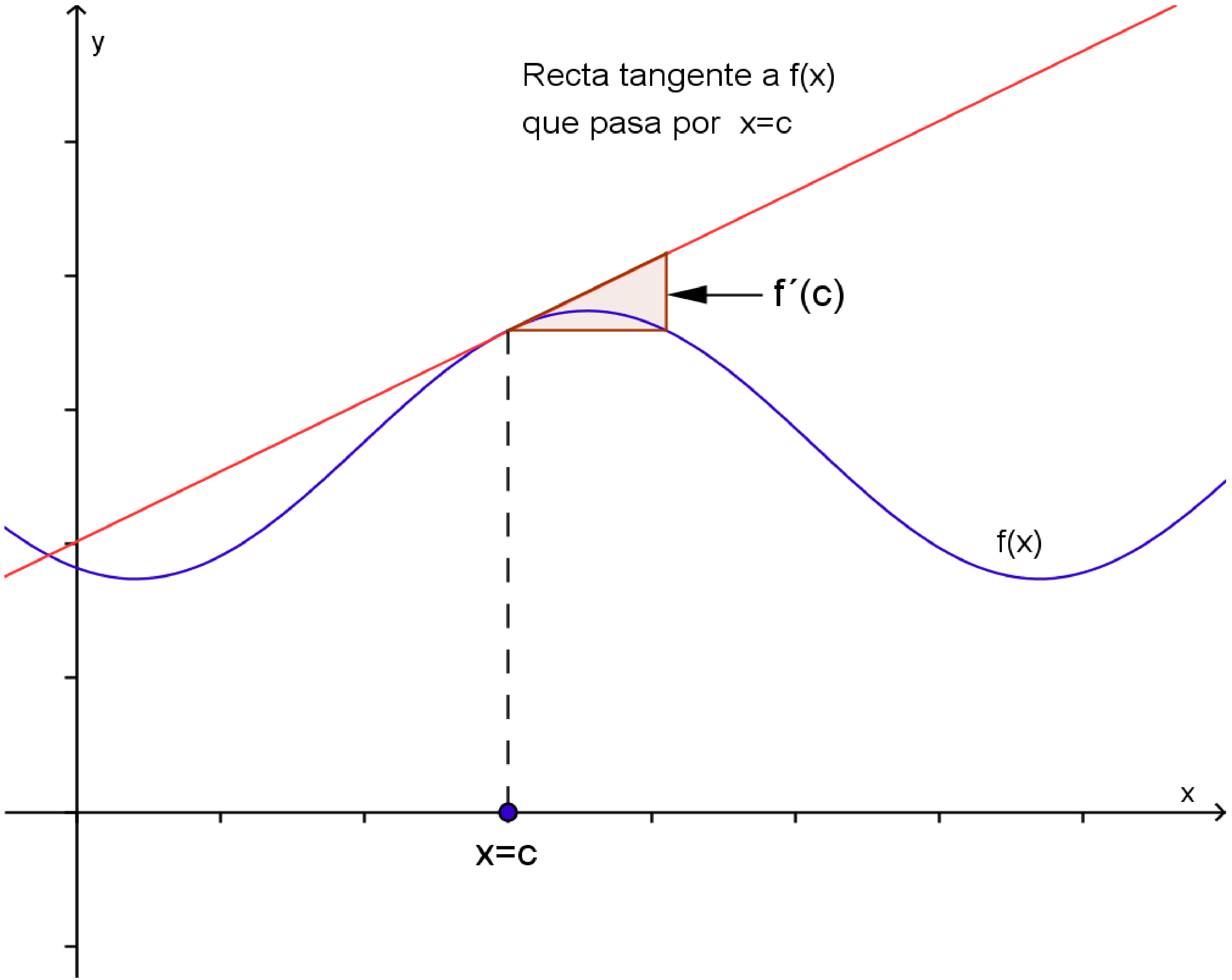
$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$f'(x)$ se lee como "f prima de x". El proceso de calcular la derivada se denomina derivación, y se dice que $f(x)$ es derivable en $x = c$ si $f'(c)$ existe; es decir, si el límite que define $f'(x)$ existe cuando $x = c$.

Recta Tangente

La derivada evaluada en $x = c$ corresponde a la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = c$; es decir:

$$f'(c) = Pendiente\ recta\ \tan gente\ a\ f(x)\ que\ pasa\ por\ x = c$$


y
Recta tangente a f(x)
que pasa por x=c
f´(c)
f(x)
x
x=c

Derivada de una función en un punto

Dada una función y = f(x), se llama derivada de la función f en un punto x0 al

límite, si existe y es finito (un número), $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ y se simboliza por

Notación de Derivadas

Sea $y = f(x)$, entonces la derivada de la función se puede denotar por:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx}$$

Cuando este límite existe (*y es finito*) se dice que la función f(x) es derivable en el punto x_0.

Calcular la derivada de la función f(x) = 3x + 5 en el punto de abscisa x = 1.

Resolución:

Se pide el valor de f '(1) (en este caso, $x_0 = 1$).

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \quad \left.\begin{matrix} f(1+h) = 3(1+h) + 5 = 3h + 8 \\ f(1) = 3 \cdot 1 + 5 = 8 \end{matrix}\right\}$$

- $$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{3h + 8 - 8}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3h}{h} = \lim_{h \to 0} 3 = 3$$

Aplica la definición de derivada y calcula la derivada de las siguientes funciones en los puntos que se indica:

64 $f(x) = 3x + 1$ en $x = 2$

Solución:

$f'(2) = 3$

65 $f(x) = -2x + 3$ en $x = 1$

Solución:

$f'(1) = -2$

66 $f(x) = x^2$ en $x = -3$

Solución:

$f'(-3) = -6$

67 $f(x) = -x^2 + 5$ en $x = 1$

Solución:

$f'(1) = -2$

Ejercicio: cálculo de la ecuación de la tangente a una función en un punto

Calcular la ecuación de la tangente a la curva $f(x) = x^2$ en el punto de abscisa 2.

Resolución: La tangente pasa por el punto (2, f(2)) = (2,4).

La pendiente (**m**) de la tangente a la curva en el punto de abscisa 2 es, por definición, f '(2), luego la ecuación de la recta es de la forma

$y - y_0 = m\,(x - x_0)$

$y - 4 = f\,'(2)\,(x - 2)$

- $$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 + 4h}{h} = \lim_{h\to 0} (h + 4) = 4$$

La ecuación de la tangente es entonces

$y - 4 = 4(x - 2)$

$y - 4 = 4x - 8$**$4x - y - 4 = 0$.**

4. Aplicaciones de la derivada

85 Halla la recta tangente a la curva $y = x^2 - 2x$ para $x = 3$. Dibuja la función y la recta tangente.

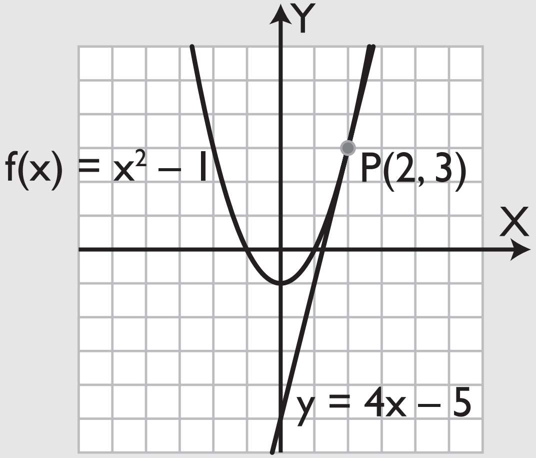
Solución:

Recta tangente: $y = 4x - 9$

123 Halla la recta tangente a la curva $y = x^2 - 1$ para $x = 2$. Dibuja la función y la recta tangente.

Solución:

Recta tangente: $y = 4x - 5$



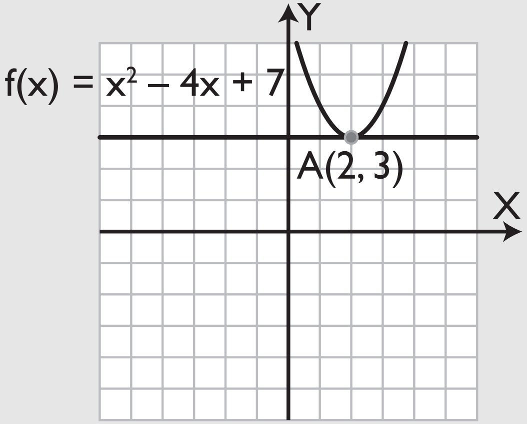
141 Halla la recta tangente a la curva:

$$y = x^2 - 4x + 7$$

para $x = 2$. Dibuja la función y la recta tangente.

Solución:

Recta tangente: $y = 3$



$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Algebra de derivadas:

DERIVADAS ELEMENTALES

1. Si $f(x) = x^n$; $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

2. Si $f(x) = C$, con C una constante ; $f'(x) = 0$

3. Si $f(x) = b^x$; $f'(x) = b^x \cdot \ln(b)$

4. Si $f(x) = e^x$; $f'(x) = e^x$

5. Si $f(x) = \log_b(x)$; $f'(x) = \dfrac{1}{x \cdot \ln(b)}$

6. Si $f(x) = \ln(x)$; $f'(x) = \dfrac{1}{x}$

ALGEBRA DE LAS DERIVADAS

1. Derivada de una suma (diferencia)

$$\left[f(x) \pm g(x)\right]' = f'(x) \pm g'(x)$$

2. Derivada de un producto

$$\left[f(x) \cdot g(x)\right]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

3. Derivada de una división

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

EJEMPLO 1 Aplicación de la regla del producto

Encontrar la derivada de $h(x) = (3x - 2x^2)(5 + 4x)$.

Solución

$$h'(x) = \underbrace{(3x - 2x^2)}_{\text{Primera}} \underbrace{\frac{d}{dx}[5 + 4x]}_{\text{Derivada de la segunda}} + \underbrace{(5 + 4x)}_{\text{Segunda}} \underbrace{\frac{d}{dx}[3x - 2x^2]}_{\text{Derivada de la primera}}$$

Aplicar la regla del producto.

$$\begin{aligned} &= (3x - 2x^2)(4) + (5 + 4x)(3 - 4x) \\ &= (12x - 8x^2) + (15 - 8x - 16x^2) \\ &= -24x^2 + 4x + 15 \end{aligned}$$

En el ejemplo 1 se cuenta con la opción de calcular la derivada con o sin la regla del producto. Sin ella se escribiría

$$\begin{aligned} D_x[(3x - 2x^2)(5 + 4x)] &= D_x[-8x^3 + 2x^2 + 15x] \\ &= -24x^2 + 4x + 15. \end{aligned}$$

Encontrar la derivada de $y = \dfrac{5x - 2}{x^2 + 1}$.

Solución

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{5x - 2}{x^2 + 1}\right] = \frac{(x^2 + 1)\dfrac{d}{dx}[5x - 2] - (5x - 2)\dfrac{d}{dx}[x^2 + 1]}{(x^2 + 1)^2}$$ Aplicar la regla del cociente.

$$= \frac{(x^2 + 1)(5) - (5x - 2)(2x)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{(5x^2 + 5) - (10x^2 - 4x)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{-5x^2 + 4x + 5}{(x^2 + 1)^2}$$

Ejercicios:

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = x^5$

c) $f(x) = 2$

d) $f(x) = \sqrt{x}$

e) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

f) $f(x) = e^x$

g) $f(x) = 2^x$

h) $f(x) = \ln(x)$

i) $f(x) = \log(x)$

2. a) $2x$ b) $5x^4$ c) 0

   d) $\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$ e) $\dfrac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}$ f) e^x

   g) $2^x \cdot \ln(2)$ h) $\dfrac{1}{x}$ i) $\dfrac{1}{x\cdot\ln(10)}$

Determine la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 3x^2 - x + 5$

b) $f(x) = 6x^2 + 5x - 6$

c) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

d) $f(x) = 4x^3 - x$

e) $f(x) = x + \ln(x)$

f) $f(x) = e^x - \sqrt{x} - 2$

a) $6x - 1$

b) $12x + 5$

c) $3x^2 + 6x + 3$

d) $12x^2 - 1$

e) $1 + \frac{1}{x}$

f) $e^x - \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$

Ejercicios
aplicación de fórmulas

3. $y = 12$

4. $f(x) = -9$

5. $y = x^7$

6. $y = x^{16}$

7. $y = \dfrac{1}{x^5}$

8. $y = \dfrac{1}{x^8}$

9. $f(x) = \sqrt[5]{x}$

10. $g(x) = \sqrt[4]{x}$

11. $f(x) = x + 11$

12. $g(x) = 3x - 1$

13. $f(t) = -2t^2 + 3t - 6$

14. $y = t^2 + 2t - 3$

15. $g(x) = x^2 + 4x^3$

16. $y = 8 - x^3$

17. $s(t) = t^3 + 5t^2 - 3t + 8$

18. $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x$

1. $g(x) = (x^2 + 3)(x^2 - 4x)$

2. $f(x) = (6x + 5)(x^3 - 2)$

3. $h(t) = \sqrt{t}(1 - t^2)$

4. $g(s) = \sqrt{s}(s^2 + 8)$

7. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

8. $g(t) = \dfrac{t^2 + 4}{5t - 3}$

9. $h(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^3 + 1}$

10. $h(s) = \dfrac{s}{\sqrt{s} - 1}$

1. $2(2x^3 - 6x^2 + 3x - 6)$ **3.** $(1 - 5t^2)/\left(2\sqrt{t}\right)$

5. $x^2(3 \cos x - x \operatorname{sen} x)$ **7.** $(1 - x^2)/(x^2 + 1)^2$

9. $(1 - 5x^3)/\left[2\sqrt{x}(x^3 + 1)^2\right]$ **11.** $(x \cos x - 2 \operatorname{sen} x)/x^3$

Reglas para derivar funciones exponenciales.

$$\frac{d}{dx}[e^x] = e^x$$

$$\frac{d}{dx}[e^u] = e^u \cdot u'$$

$$\frac{d}{dx}[a^x] = [\ln(a)] \cdot a^x$$

$$\frac{d}{dx}[a^u] = [\ln(a)] \cdot a^u \cdot u'$$

Resumen

REGLAS DE DERIVACIÓN		
Suma	$(f+g)' = f' + g'$	La derivada de una suma de dos funciones es la suma de las derivadas de estas funciones.
Resta	$(f-g)' = f' - g'$	La derivada de una diferencia de dos funciones es la diferencia de las derivadas de estas funciones.
Producto	$(f \cdot g) = f' \cdot g + f \cdot g'$	La derivada del producto de dos funciones es igual a la derivada de la primera función por la segunda sin derivar más la primera función sin derivar por la derivada de la segunda.
Cociente	$\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$	La derivada del cociente de dos funciones es igual a la derivada de numerador por el denominador sin derivar menos el numerador sin derivar por la derivada del denominador y, todo ello, dividido por el denominador elevado al cuadrado
Producto por un número	$(a \cdot f) = a \cdot f'$	La derivada del producto de un número real por una función es igual al número real por la derivada de la función.
Composición	$[g(f(x))]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$	Regla de la cadena