

Unidad 2

Geometría Analítica

Geometría analítica

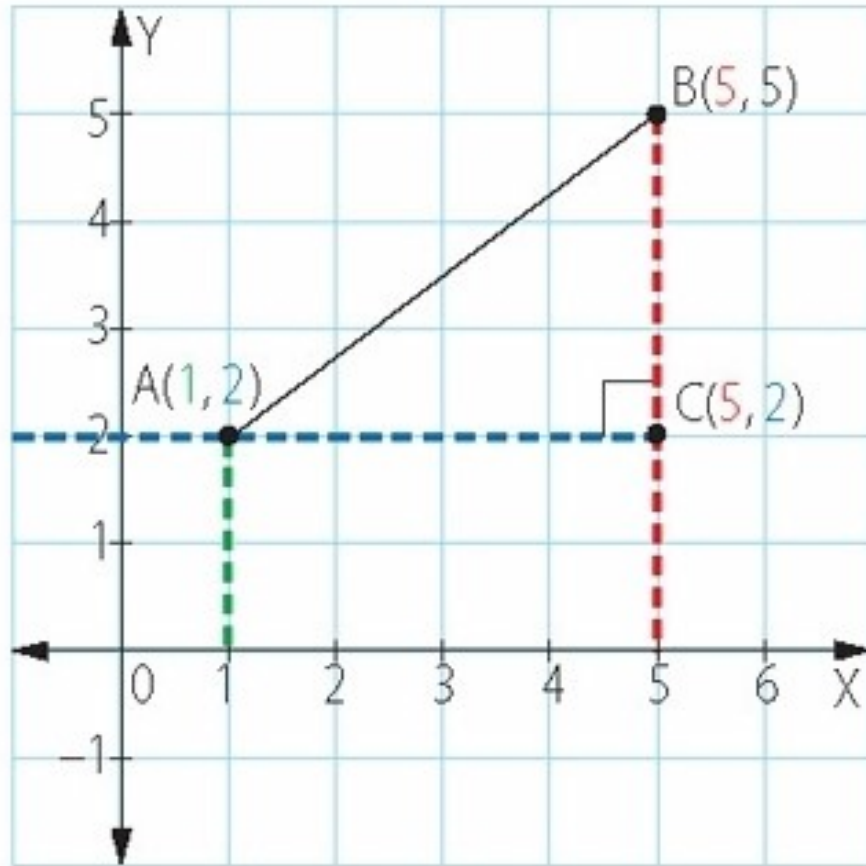
Estudia las figuras geométricas utilizando un sistema de coordenadas y resuelve los problemas geométricos por métodos algebraicos; las coordenadas se representan por grupos numéricos y las figuras por ecuaciones.

Lo que debes recordar

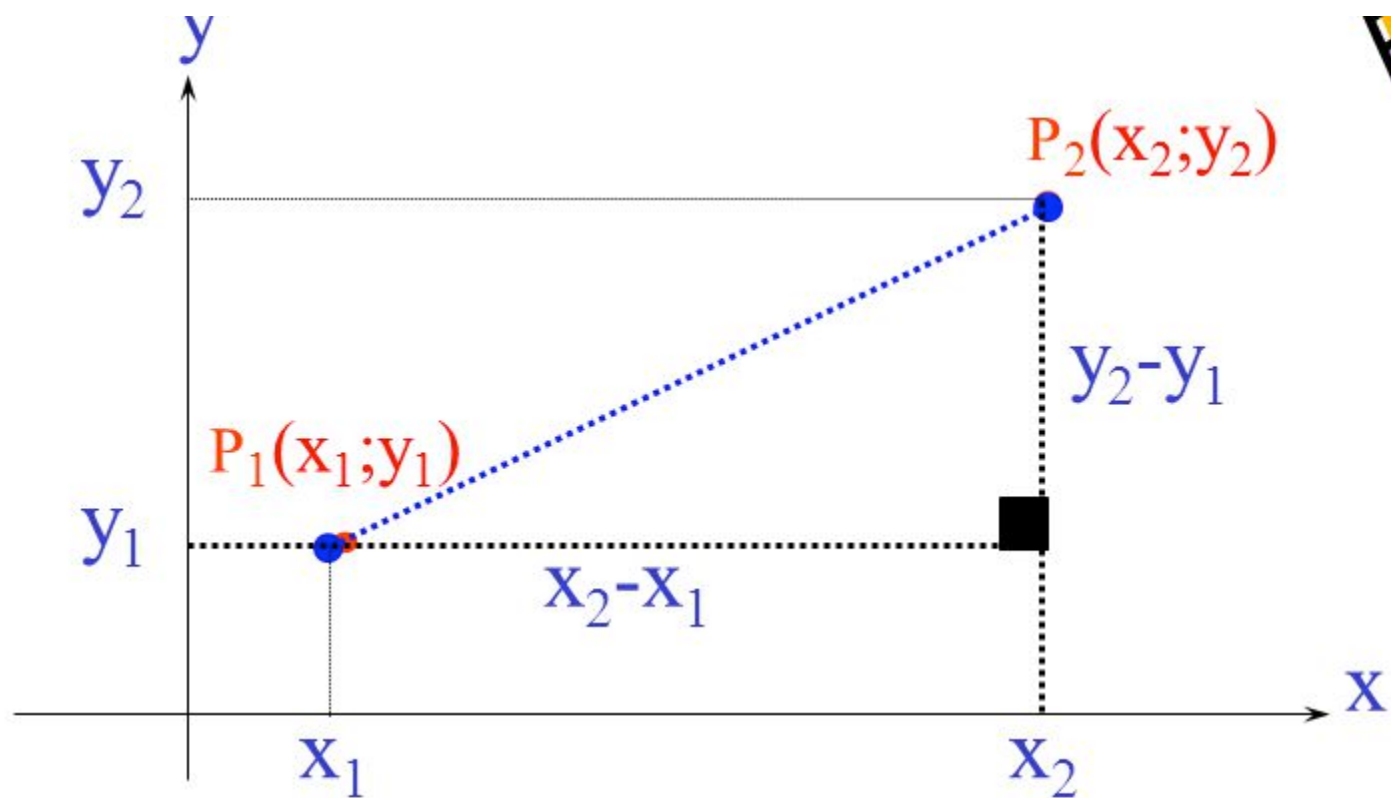
- La geometría analítica es la parte de las matemáticas que establece una conexión entre el álgebra y la geometría euclidiana, y en la cual se estudian figuras referidas a un sistema de coordenadas.
- René Descartes es considerado el creador o inventor de la geometría analítica.

Distancia entre dos puntos:

Figura 2

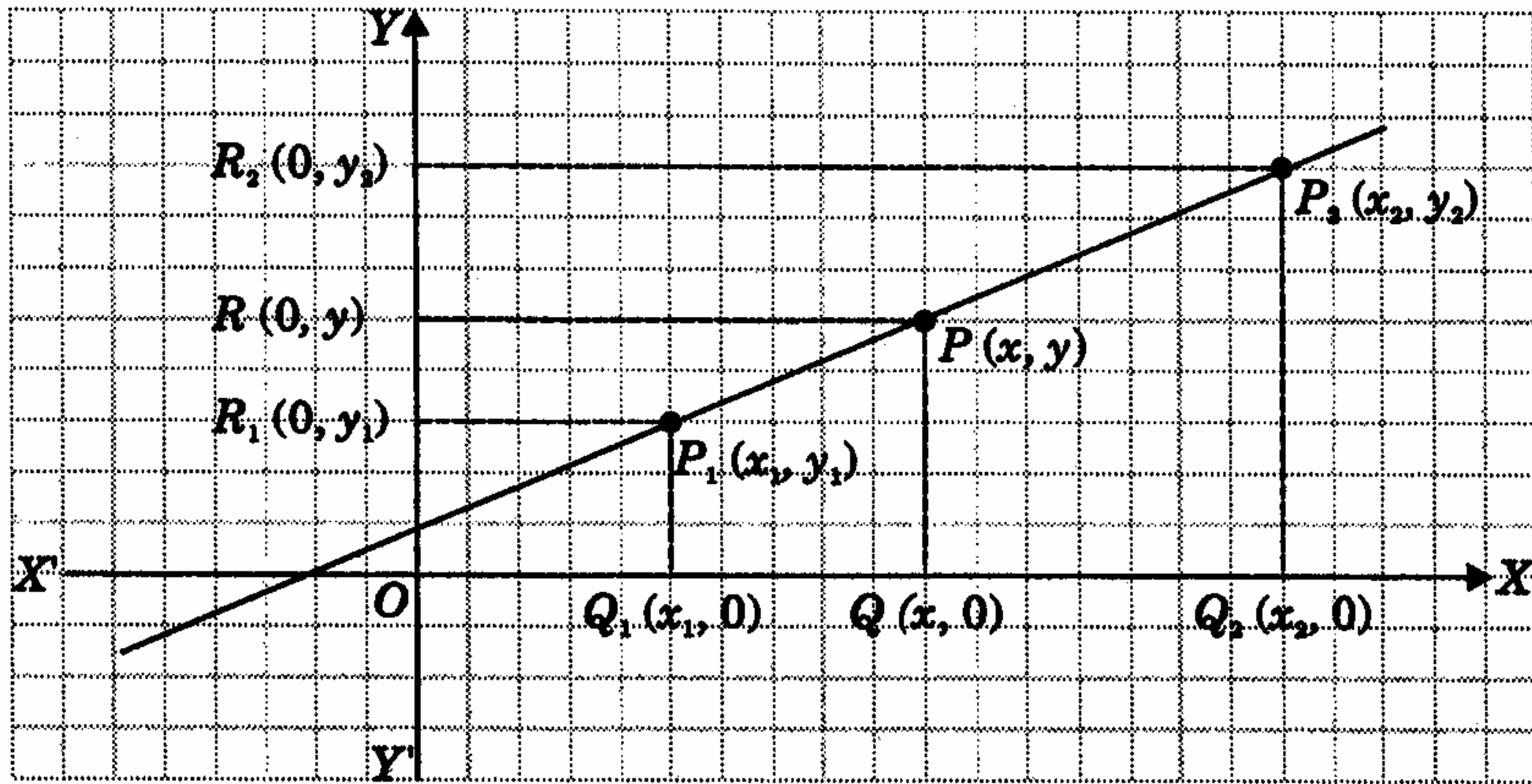


Encontrar la distancia entre los puntos A y B



$$d(P_1; P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

División de un segmento en una razón dada



Teorema

Las coordenadas de un punto P que divide a un segmento cuyos extremos son $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ en la razón dada $r = \frac{P_1P}{PP_2}$ son:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} \quad y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r} \quad \text{Siendo } r \neq -1.$$

Corolario

Las coordenadas de un punto P que es el punto medio de un segmento cuyos extremos son $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, son:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

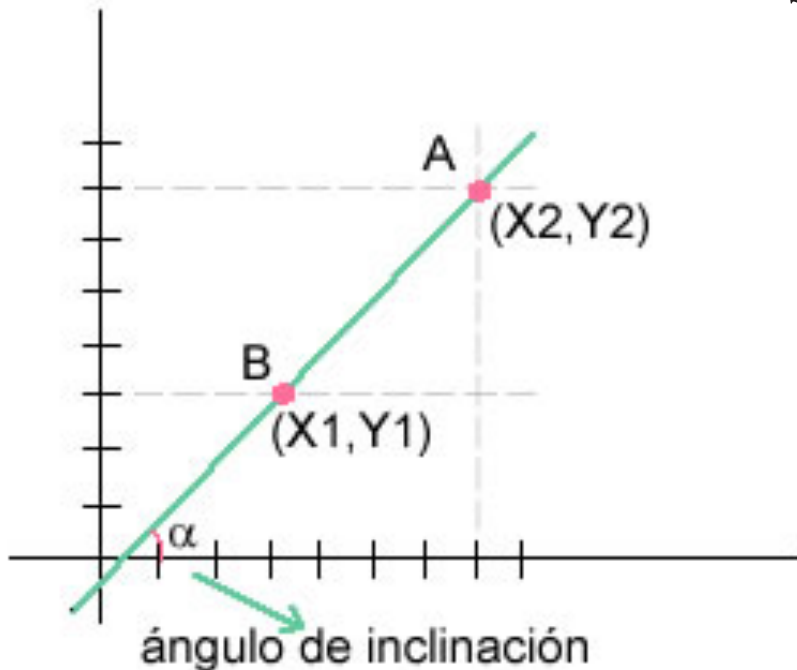
Pendiente y ecuación de una recta

Definición de la pendiente de una recta

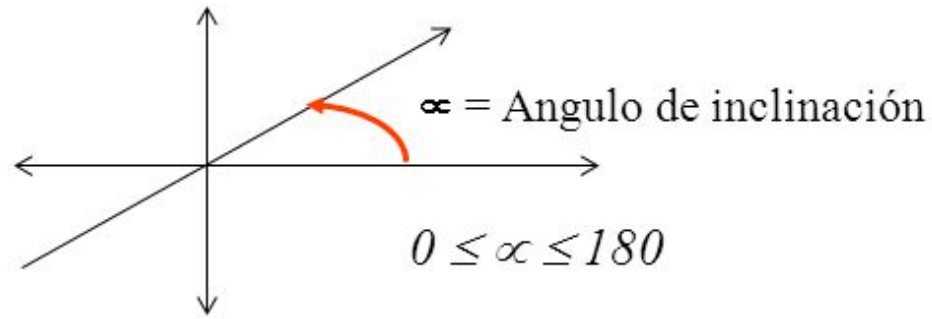
Sea l una recta que no es paralela al eje y , y sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ puntos distintos en l . La **pendiente** m de l es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Si l es paralela al eje y , entonces la pendiente de l no está definida.



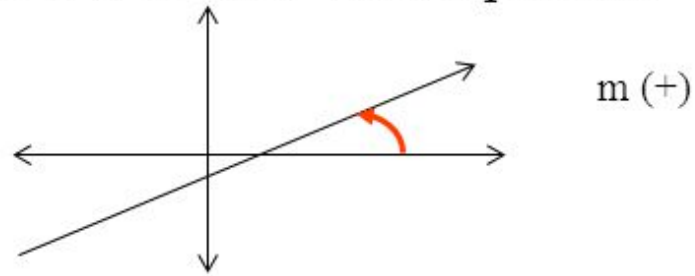
Ángulo de Inclinación: Es el ángulo formado por la parte positiva del eje X y la recta, cuando ésta se considera dirigida hacia arriba.



Pendiente m : Es la tangente del ángulo de inclinación de la recta

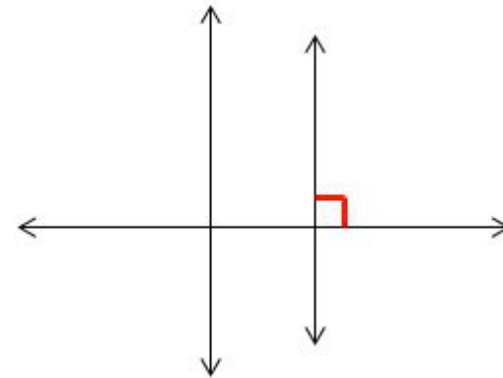
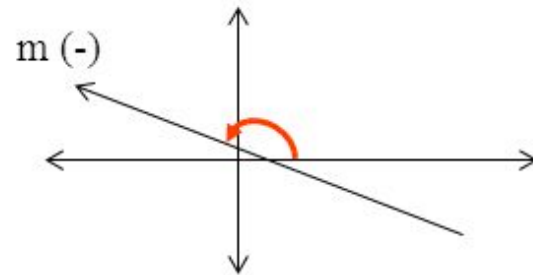
$$m = \operatorname{tg} \alpha$$

Si $0 \leq \alpha < 90 \Rightarrow m$ es positiva



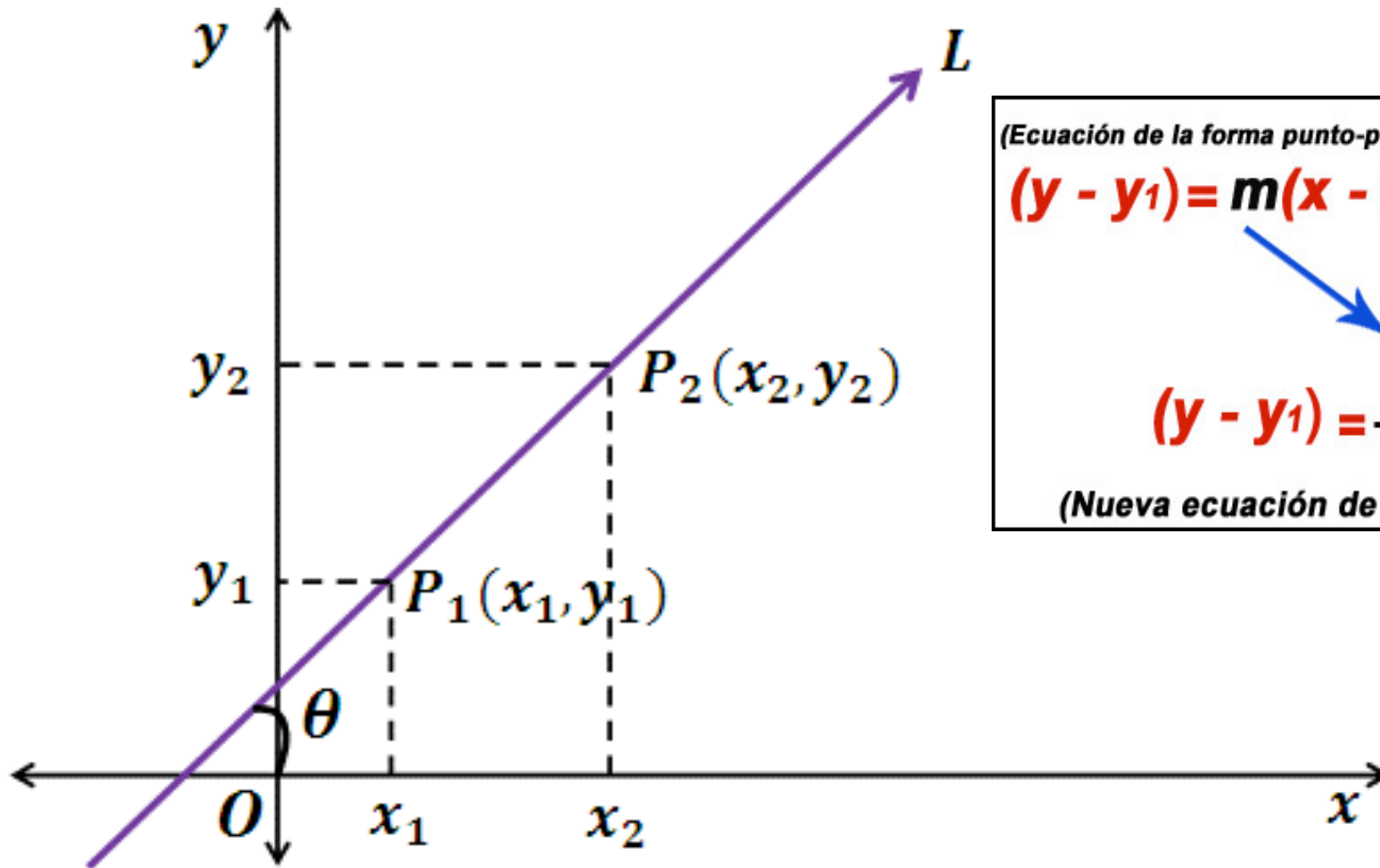
Si $\alpha = 90 \Rightarrow m = \operatorname{tg} \alpha$ no está definida

Si $90 < \alpha \leq 180 \Rightarrow m$ es negativa



Toda recta perpendicular al eje x no tiene pendiente

Ecuación de la recta.



(Ecuación de la forma punto-pendiente)

$$(y - y_1) = m(x - x_1)$$

(Ecuación pendiente)

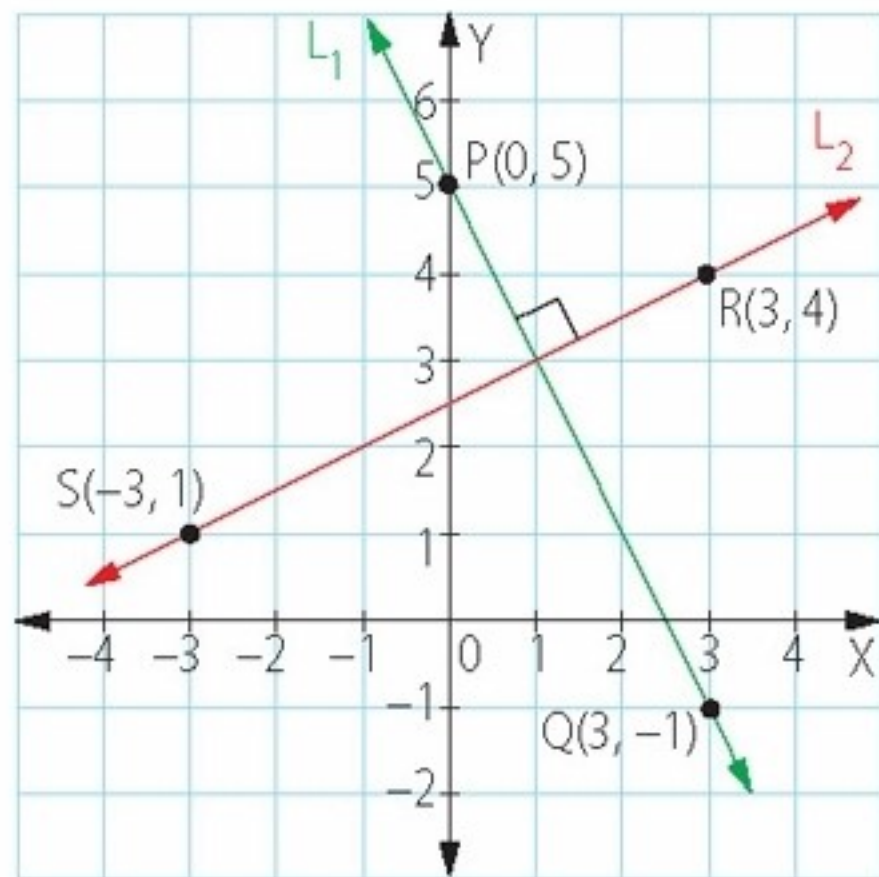
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$(y - y_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

(Nueva ecuación de la recta de la forma punto-punto)

Rectas perpendiculares

Figura 1



Rectas perpendiculares

En la figura 1, se muestran dos rectas perpendiculares, L_1 y L_2 . Sus pendientes son:

$$L_1: m_1 = \frac{5 - -1}{0 - 3} = \frac{6}{-3} = -2 \qquad L_2: m_2 = \frac{4 - 1}{3 - -3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Luego, $m_1 \cdot m_2 = -1$, ya que:

$$m_1 \cdot m_2 = -2 \cdot \frac{1}{2} = -1$$

Si $L_1: y = m_1x + n_1$ y $L_2: y = m_2x + n_2$, con $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$, se cumple:

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$$

En resumen se tiene:

ECUACIÓN PRINCIPAL

Sean las rectas de ecuaciones:

$$L_1: y = 5x + 1 \quad L_2: y = -\frac{1}{5}x + 2$$

son perpendiculares entre sí, ya que:

$$m_1 \cdot m_2 = 5 \cdot -\frac{1}{5} = -1$$

En general,

dos rectas, de ecuaciones:

$$L_1: y = mx + n_1$$

$$L_2: y = -\frac{1}{m}x + n_2$$

son perpendiculares, si se cumple:

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

ECUACIÓN GENERAL

Las rectas de ecuaciones:

$$L_1: 2x + 3y + 1 = 0 \quad L_2: 15x - 10y - 7 = 0$$

son perpendiculares entre sí, pues:

$$m_1 \cdot m_2 = -\frac{2}{3} \cdot \frac{15}{10} = -\frac{30}{30} = -1$$

En general,

dos rectas, de ecuaciones:

$$L_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

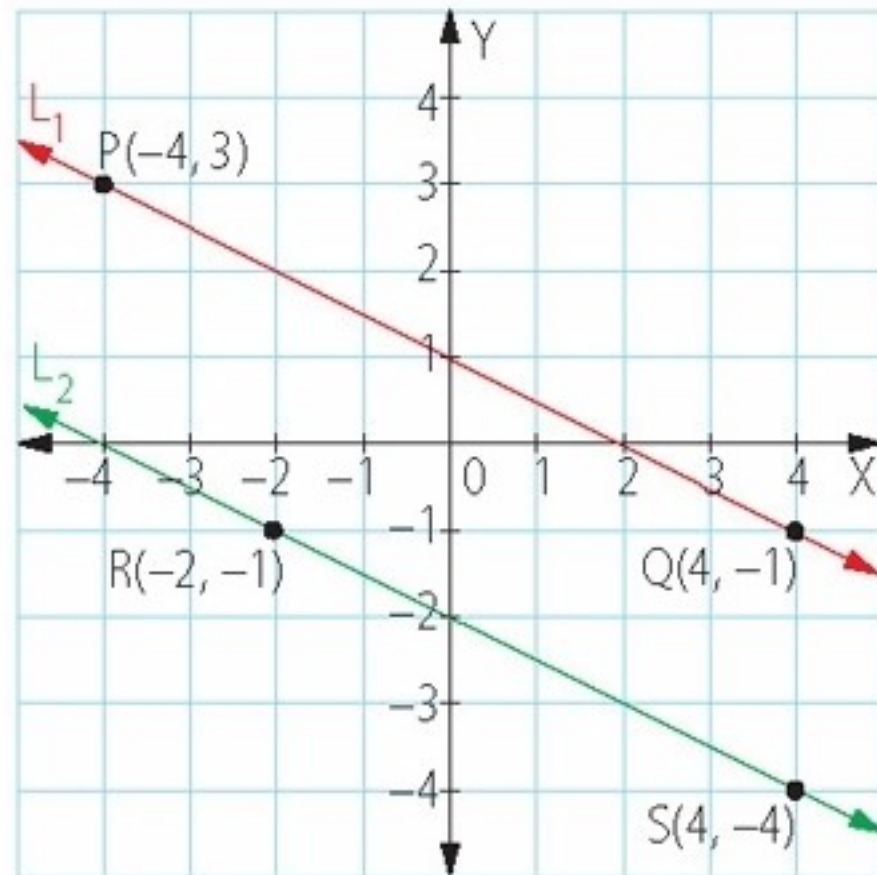
$$L_2: B_2x + A_2y + C_2 = 0$$

son perpendiculares, si se cumple:

$$\frac{A_1}{B_1} \cdot \frac{A_2}{B_2} = -1$$

Rectas paralelas

Figura 1



Rectas paralelas.

En la figura 1, se muestran dos rectas paralelas, L_1 y L_2 . Se observa que ambas tienen la misma inclinación, lo que implica que sus pendientes son iguales. En efecto,

$$L_1: m_1 = \frac{-1-3}{4--4} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2} \quad L_2: m_2 = \frac{-4--1}{4--2} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$$

Luego, $m_1 = m_2$.

Si $L_1: y = m_1x + n_1$ y $L_2: y = m_2x + n_2$, con $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$, se cumple:

$$L_1 // L_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$$

Ejercicios

Determina en cada caso el valor de k , para que se cumpla la condición dada.

9. $L_1: 2y + (4k + 2)x - 5 = 0$ y $L_2: 3y + (3 - 15k)x - 5 = 0$ son paralelas.

10. $L_1: kx + (k - 1)y - 18 = 0$ y $L_2: 3x - 2y - 11 = 0$ son perpendiculares.

11. $L_1: k^2x + (k + 2)y - 18 = 0$ y $L_2: 2x - 2y - 2 = 0$ son perpendiculares.

12. $L_1: 7x + 5y - 18 = 0$ y $L_2: kx - 8y - 2 = 0$ no son paralelas ni perpendiculares.



Posiciones relativas entre rectas

Determina, en cada caso, lo pedido.

11. La ecuación de la recta que es paralela a $L_1: y = 2x + 3$ y que pasa por $P(3, 4)$.
12. La ecuación de la recta que es perpendicular a $L_1: 2x + 4y = 5$ y que pasa por $Q(-1, 2)$.
13. El valor de k para que $L_1: 2x + y = -4$ y $L_2: 3x + ky = -2$ sean paralelas.
14. El valor de k para que $L_1: 3x + 2y = 1$ y $L_2: kx + 2y = -2$ sean perpendiculares.

Distancia entre un punto y una recta

Frecuentemente en geometría nos encontramos con el problema de calcular la distancia desde un punto a una recta.

Distancia de un punto a una recta

La fórmula para calcular la mínima distancia medida desde el punto $P(x_1, y_1)$ hasta la recta $\ell : Ax + By + C = 0$, es:

$$D_{P\ell} = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

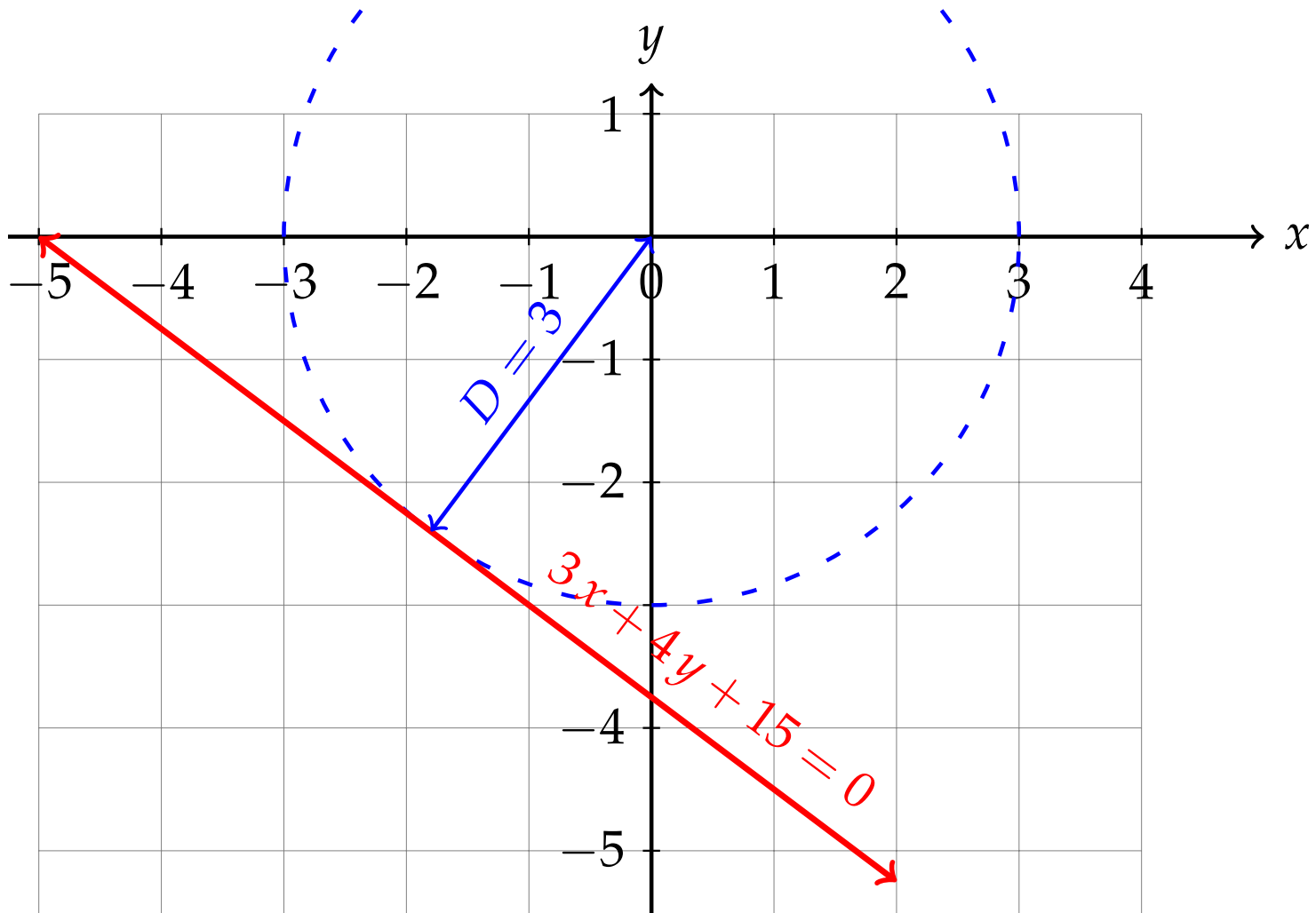
¿A qué distancia pasa la recta $3x + 4y + 15 = 0$ del origen?

- Este problema es equivalente a la siguiente solicitud:

Calcula la distancia desde la recta $3x + 4y + 15 = 0$ hasta el punto $P(0,0)$.

- Ahora que conocemos los datos, basta sustituir en la fórmula de distancia de un punto a una recta y realizar las operaciones que quedan indicadas:

$$\begin{aligned} D &= \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \\ &= \frac{|3(0) - 4(0) + 15|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|0 - 0 + 15|}{\sqrt{25}} \\ &= \frac{|15|}{5} = 3 \end{aligned}$$



Ejercicio . Hallar la distancia del punto $A(3, -2)$ a la recta cuya ecuación es $2x + 3y - 6 = 0$.

Hallar la distancia del punto $M(-2, -4)$ a la recta cuya ecuación es $2x + 6y + 12 = 0$.

$d = 2.53$

