Limites de una función

Idea intuitiva

Aproximarse

A veces algo no se puede calcular directamente, pero **puedes** saber cuál debe de ser el resultado si se acerca más y más.

Usemos por ejemplo esta función:

$$(x^2-1)/(x-1)$$

Y calculemos su valor para x=1:

$$(1^2-1)/(1-1) = (1-1)/(1-1) = 0/0$$

¡Pero 0/0 es un problema! En realidad no podemos saber el valor de 0/0, así que tenemos que encontrar otra manera de hacerlo.

En lugar de calcular con x=1 vamos a **acercarnos** poco a poco:

Acercamiento Por La izquierda

x	$(x^2-1)/(x-1)$
0.5	1.50000
0.9	1.90000
0.99	1.99000
0.999	1.99900
0.9999	1.99990
0.99999	1.99999
...	...

Acercamiento Por La derecha

x	$(x^2-1)/(x-1)$
1.5	2.50000
1.1	2.10000
1.01	2.01000
1.001	2.00100
1.0001	2.00010
1.00001	2.00001
...	...

Vemos que cuando x se acerca a 1, $(x^2-1)/(x-1)$ se acerca a 2

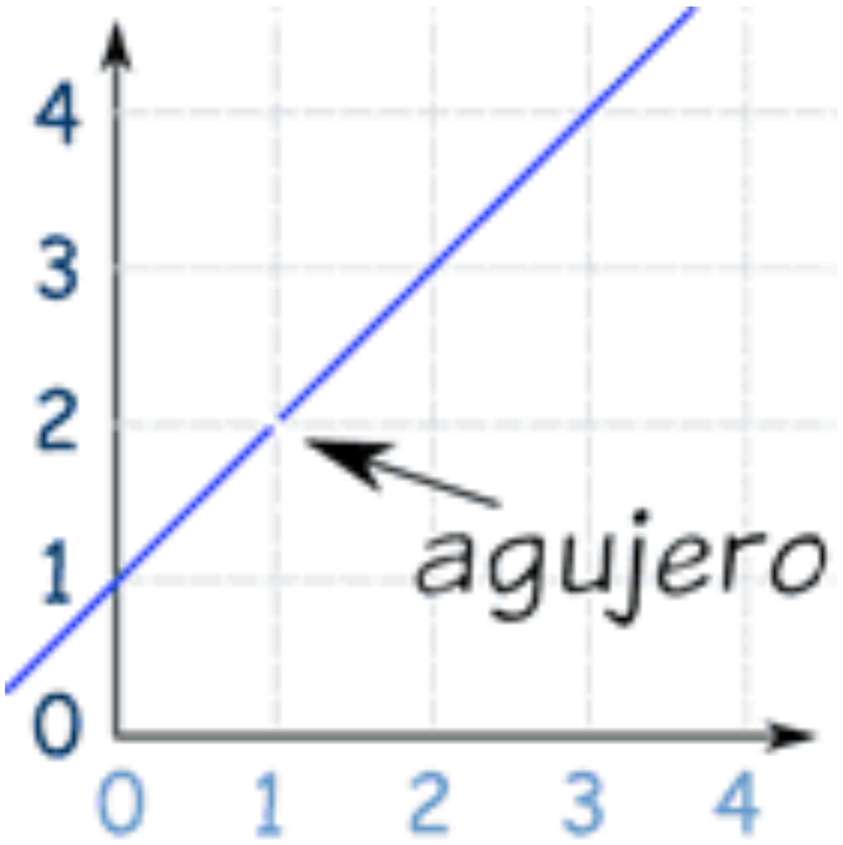
- Cuando x=1 no sabemos la respuesta (es **indeterminada**)
- Pero vemos que **va a ser 2**

El **límite** de $(x^2-1)/(x-1)$ cuando x *tiende* (o *se aproxima*) a 1 es **2**

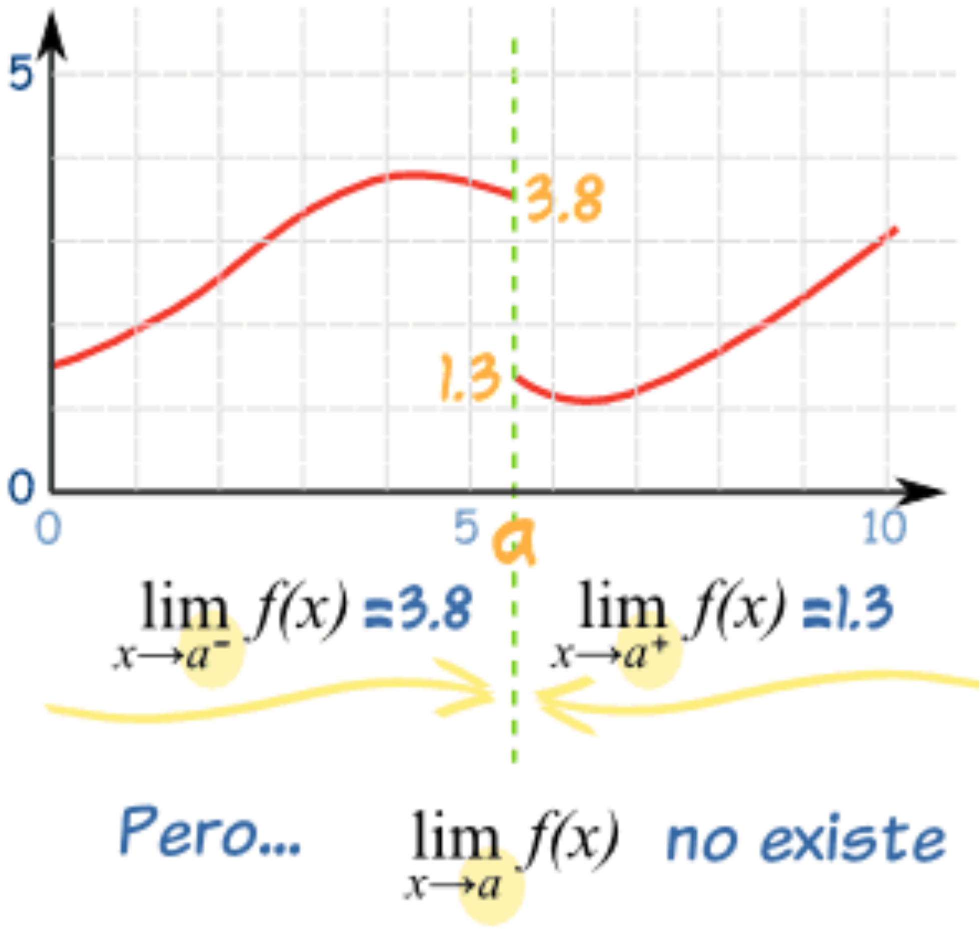
Notación:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

Gráfica



Existencia de Límites



En esta función **el límite no existe** en "a" .
No puedes decir cuál es, porque hay dos respuestas contradictorias:

- 3.8 por la izquierda, y
- 1.3 por la derecha

Pero **sí puedes** usar los signos "-" o "+" (como en la figura).
para definir los límites laterales:

- el límite **por la izquierda** (-) es 3.8
- el límite **por la derecha** (+) es 1.3

Y el límite ordinario **"no existe"**

TECNICAS PARA CALCULAR LÍMITES

Cuando se esta calculando el límite de una función racional cuyo denominador es cero, se trata de eliminar esta determinación utilizando 3 métodos que son:

Factorización.
Racionalización.
Regla de Hopital

EJEMPLOS: CALCULAR EL LIMITE (SI EXISTE)

1. $\lim\limits_{X \to 0} \dfrac{7x + x^2}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x(7 + x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} (7 + x) = 7 + 0 = 7$

2. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{x^2 + 2x - 3} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{(x + 3)(x - 1)}$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{1}{x + 3}$$

$$= \frac{1}{1 + 3}$$

$$= \frac{1}{4}$$

3. $$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} =$$

5. $$\lim_{t \to a} \frac{t^4 - a^4}{t^2 - a^2} =$$

4. $$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3} =$$

6. $$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{(x - 1)^2} =$$

Propiedades de Limites

Propiedad 1:

Si k es una constante y a un número cualquiera, entonces

$$\lim_{x \to a} k = k$$

Propiedad 2:

Para cualquier número dado a,

$$\lim_{x \to a} x = a$$

Propiedad 3:

Si m y b son dos constantes cualesquiera, entonces

$$\lim_{x \to a} (mx + b) = ma + b$$

Propiedad 4:

Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} g(x) = M$, entonces

(I) $\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M$

(II) $\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$

(III) $\lim_{x \to a} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{L}{M}$

(IV) $\lim_{x \to a} [k f(x)] = kL$, k es una constante

Propiedad 5:

Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y n es un entero positivo, entonces

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^n = L^n$$

Propiedad 6:

Si f es un polinomio y a es un número real, entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Propiedad 7:

Si q es una función racional y a pertenece al dominio de q, entonces

$$\lim_{x \to a} q(x) = q(a)$$

Propiedad 8:

Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y n es un entero positivo, entonces

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \left[\sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}\right] = \sqrt[n]{L}$$

1. $\lim_{x\to 3} 77$	2. $\lim_{x\to 5}(3x-7)$	3. $\lim_{x\to 2}(x^2+2x-1)$
4. $\lim_{x\to 3}\frac{4x-5}{5x-1}$	5. $\lim_{x\to 1}\sqrt{\frac{8x+1}{x+3}}$	6. $\lim_{x\to -3/2}\frac{4x^2-9}{2x+3}$

$$\lim_{x\to 2}(x^3 + 2x^2 - x - 4) = \lim_{x\to 2} x^3 + \lim_{x\to 2} 2x^2 - \lim_{x\to 2} x - \lim_{x\to 2} 4$$

$$= (2)^3 + 2(2)^2 - (2) - 4$$

$$= 8 + 8 - 2 - 4$$

$$= 10$$

$$\lim_{x\to -5} \sqrt[3]{(x^2+2)} = \sqrt[3]{\lim_{x\to -5}[(x)^2+2]}$$

$$= \sqrt[3]{[(-5)^2+2]}$$

$$= \sqrt[3]{27} = 3 \quad realiz$$

$$\lim_{h\to o} \frac{h}{(h^2 - 7h + 1)} = \frac{\lim_{h\to 0} h}{\lim_{h\to 0}(h^2 - 7h + 1)}$$

$$= \frac{0}{(0^2 - 7(0) + 1)} = 0$$

Limites con radicales

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x} =$$

No se puede aplicar el límite directamente, daría la forma indeterminada 0/0; no obstante, luego de multiplicar tanto el numerador como el denominador por la conjugada de la expresión en el numerador y luego reduciendo y simplificando, se puede aplicar el TL para hallar el límite:

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} =$$

Ejercicios propuestos:

$$\lim_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}= \qquad -\frac{1}{56}$$

$$\underset{x\to 2}{Lim}\ \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}= \qquad \frac{1}{4}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}= \qquad 3x^2$$

$$\underset{x\to -1}{Lím}\ \frac{\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{2}\right)}{(x+1)} \quad =\frac{\sqrt{2}}{4}$$

1. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^3+2x^2-3x}$ b) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-3x+1}{x^2+2}$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$ d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-4x^2+5x-2}{x^3-x^2-x+1}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+x^4}{x^6-x^2}$ f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}}{x^2+x}$

g) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{3-\sqrt{5+x}}{2-\sqrt{8-x}}$ h) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x+2}-2}$

Soluciones :

a) $\dfrac{3}{4}$ b) $\dfrac{5}{3}$ c) 4 d) $\dfrac{-1}{2}$

e) -1 f) $\dfrac{-\sqrt{2}}{2}$ g) $\dfrac{-2}{3}$ h) 2

Algebra de Límites. (continuación)
Limites que tienden al infinito.
Indeterminaciones.

Propiedades

Suma y resta $\rightarrow k \pm \infty = \pm\infty$

a) $8 + \infty = \infty$ b) $-20 - \infty = -\infty$

c) $8 - (+\infty) = 8 - \infty = -\infty$ d) $-\infty + 5 = -\infty$

Producto $\rightarrow k\ (\neq 0) \cdot \pm\infty = \pm\infty$

a) $5 \cdot \infty = \infty$ b) $-3 \cdot (-\infty) = \infty$

c) $1000 \cdot \infty = \infty$ d) $-\infty \cdot (-8) = \infty$

Cociente

$\dfrac{\pm\infty}{k} = \pm\infty \rightarrow$ a) $\dfrac{\infty}{5} = \infty$ b) $\dfrac{\infty}{-10} = -\infty$ c) $\dfrac{-\infty}{5000} = -\infty$

$\dfrac{k}{\infty} = 0 \rightarrow$ a) $\dfrac{10^6}{\infty} = 0$ b) $\dfrac{-0,00005}{-\infty} = 0$ c) $\dfrac{10^6}{-\infty} = 0$

Propiedades

Potencia

$(\pm\infty)^k \rightarrow$ a) $(\pm\infty)^2 = \infty$ b) $\infty^3 = \infty$ c) $(-\infty)^3 = -\infty$

$k^{(\pm\infty)}$

- $k > 1 \rightarrow$ a) $2^{\infty} = \infty$ b) $2^{-\infty} = \frac{1}{2^{+\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$
- $0 < k < 1 \rightarrow$ a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\infty} = \frac{1}{2^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$ b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\infty} = 2^{\infty} = \infty$

Posibilidades:

a) Obtenemos solución directamente.

b) Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$

c) Indeterminación $\infty - \infty$

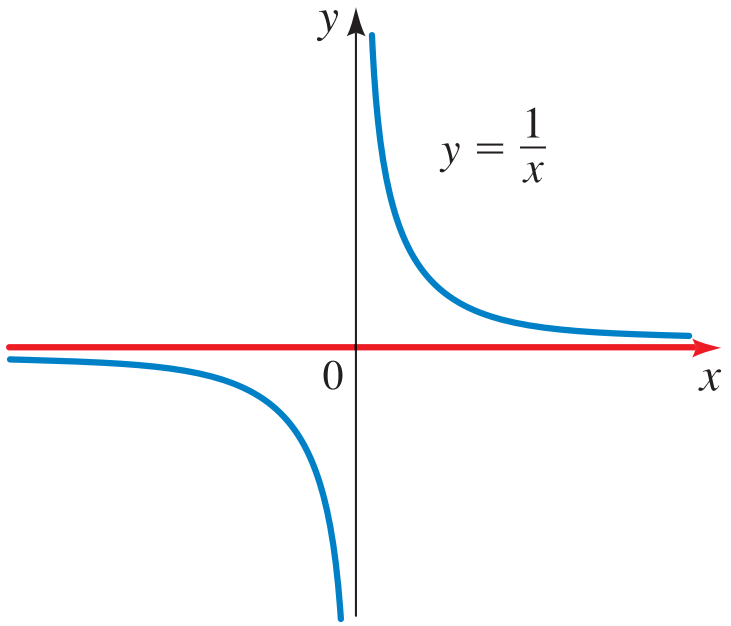


Figura 5

$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0, \ \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$

Si k es un entero positivo, entonces

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^k} = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^k} = 0$$

Ejemplo 2 Hallar un límite en el infinito

Evalúe $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1}$.

Solución Para evaluar el límite de una función racional en el infinito, se divide primero numerador y denominador entre la potencia más alta de x que aparece en el denominador. (Se podría suponer que $x \neq 0$ puesto que sólo se tiene interés en valores grandes de x.) En este caso, la potencia más alta de x en el denominador es x^2, así que se tiene

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{3 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}}{5 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{x^2}}$$

Divida numerador y denominador entre x^2

$$= \frac{\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(3 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)}{\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(5 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}$$

Límite de un cociente

$$= \frac{\displaystyle\lim_{x\to\infty} 3 - \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} - 2\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}}{\displaystyle\lim_{x\to\infty} 5 + 4\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} + \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}}$$

Límites de sumas y diferencias

$$= \frac{3 - 0 - 0}{5 + 0 + 0} = \frac{3}{5}$$

Permita que $x \to \infty$

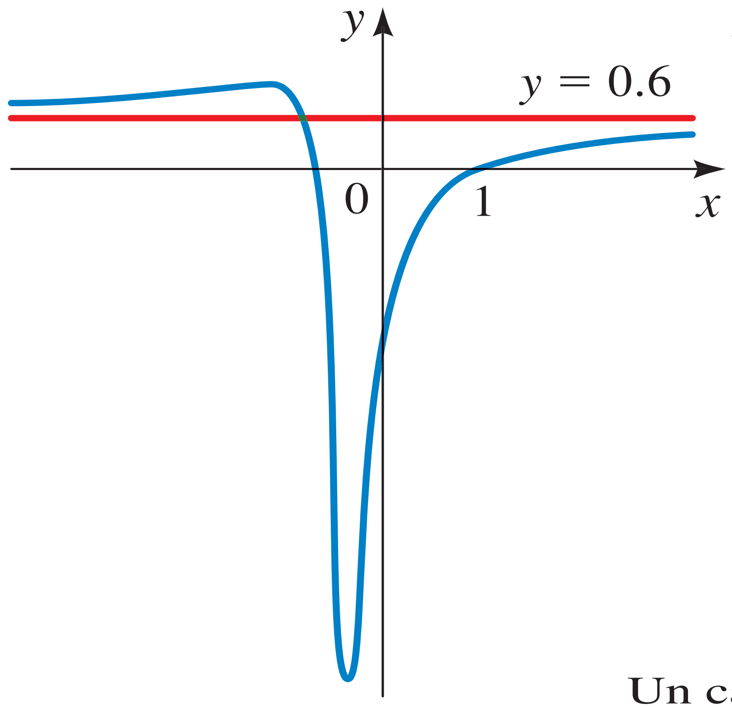


Figura 6

Un cálculo similar muestra que el límite cuando $x \to -\infty$ es también $\frac{3}{5}$. En la figura 6 se ilustran los resultados de estos cálculos mostrando cómo la gráfica de la función racional dada se aproxima a la asíntota horizontal $y = \frac{3}{5}$. ■

Ejercicios

1. $$\lim_{x \to \infty} 5x^3 + 7x$$

$$\lim_{x \to \infty} 5x^3 + 7x = \lim_{x \to \infty} 5x^3 = \lim_{x \to \infty} 5 \cdot \infty = \infty$$

2. $$\lim_{x \to -\infty} -\frac{1}{x^2}$$

$$\lim_{x \to -\infty} -\frac{1}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} -\frac{1}{\infty} = 0$$

3. $$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - 5}{-x^2 - 4} \to \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - 5}{-x^2 - 4} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{-x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{-1} = -\infty$$

1) $\lim_{x \to +\infty} \frac{4x^3 + x}{2x^3 + 3} =$

$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 2x}{4x^2 - 4}$

2) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 1}{7 - 2x + 8x^2}$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{5}{x^2 + 8x + 15} =$

Limites Laterales

En algunas funciones como las definidas por partes y las de dominio restringido, como las que tienen raíces cuadradas, se aplican los límites laterales.

En las funciones definidas por intervalos servirán para establecer si la función tiene límite en los puntos donde la función cambia de fórmula.

Definición:

Se define el *límite lateral por la derecha* de a de la función $f(x)$, y se expresa como:

$$\lim_{x \to a^+} f(x)$$

al límite al que se acerca $f(x)$ cuando x se acerca a a y toma valores mayores que a.

De igual modo, el *límite lateral por la izquierda* de a de la función $f(x)$ se expresa como:

$$\lim_{x \to a^-} f(x)$$

y se define como el límite al que se acerca $f(x)$ cuando x se acerca a a y toma valores menores que a.

Propiedad: Para que una función $f(x)$ tenga límite en $x = a$ es necesario y suficiente que existan ambos límites laterales y coincidan, es decir:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x)$$

Ejemplo 3.1. Realizar una tabla para hallar $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{|x|}{x}$.

Solución: Recordemos que

$$|x| = \begin{cases} -x & x \leq 0 \\ x & 0 \leq x \end{cases}$$

$x \longrightarrow 0^-$	$\frac{\lvert x\rvert}{x}$		$0^+ \longleftarrow x$
-0.5	-1	1	0.5
-0.1	-1	1	0.1
-0.001	-1	1	0.001

Esto indica que

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = -1 \text{ y } \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$$

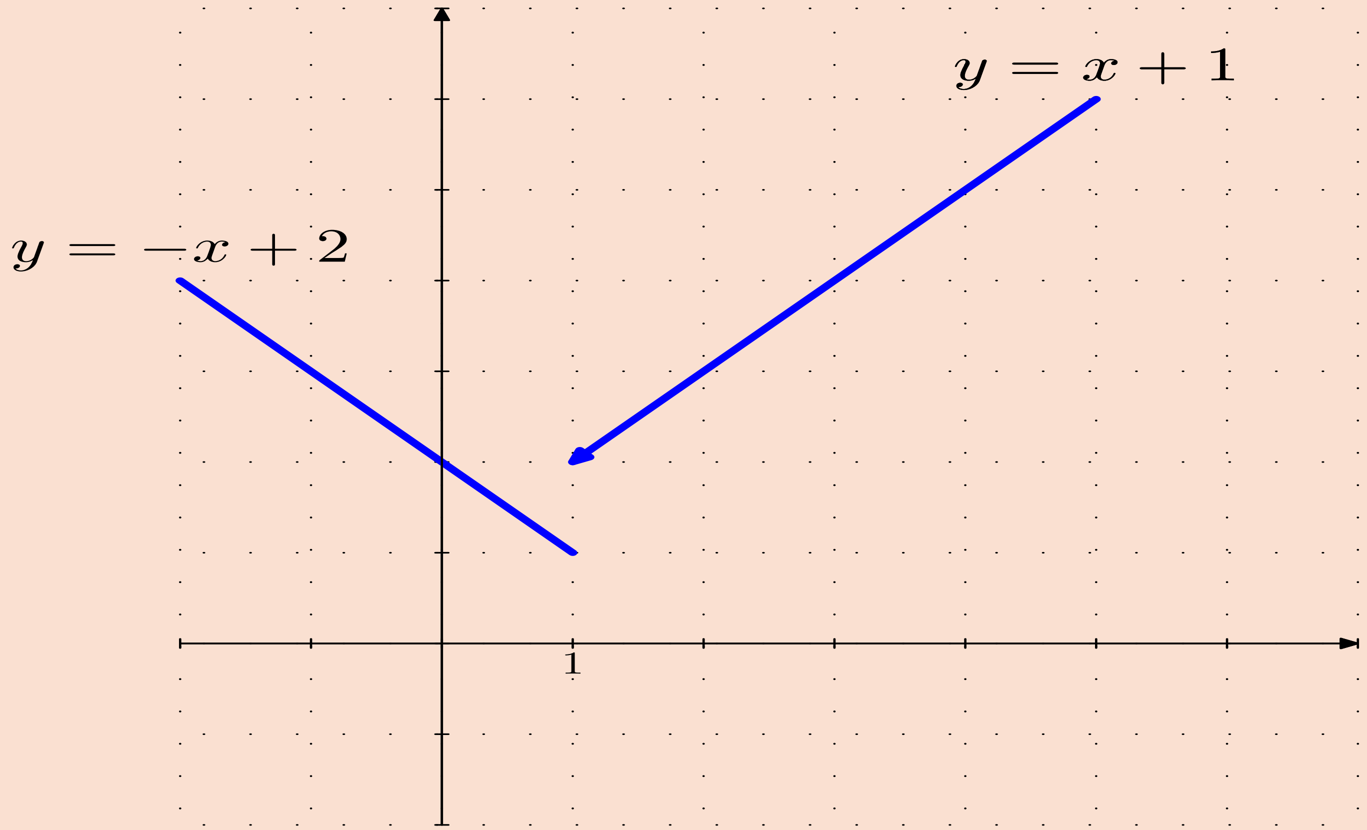
Cuando los límites laterales de una función en un punto son distintos decimos que el límite no existe. Así, en este caso tenemos que

$$f(0^-) = -1 \neq f(0^+) = 1 \Longrightarrow \nexists \lim_{x \longrightarrow 0} f(x)$$

Ejemplo 3.2. Veamos otro ejemplo de una función que tiene límites laterales distintos en un punto. Sea la función definida a trozos

Solución:

$$y = f(x) = \begin{cases} -x+2 & x \le 1 \\ x+1 & 1 < x \end{cases}$$



$$f(1^-) = \lim_{x \to 1^-} (-x+2) = 1$$

$$f(1^+) = \lim_{x \to 1^+} (x+1) = 2$$

$$f(1^-) \neq f(1^+)$$

luego

$$\nexists \lim_{x \to 1} (-x+2)$$

□

Decimos que el límite existe cuando ambos límites laterales son finitos e iguales,

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = L \iff f(a^-) = f(a^+) = L}$$

Las siguientes expresiones y resuelva los límites laterales.

1.1) $\lim\limits_{x \to -2^+} h(x)$ donde $h(x) = 3\sqrt{2+x}$;

1.2) $f(x) = \begin{cases} x-3, & \text{si } x \geq 1 \\ x^2 & \text{si } x < 1 \end{cases}$ a) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$; b) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$

1.3) $g(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{si } x < 2 \\ 2, & \text{si } x = 2 \\ 3x+1, & \text{si } x > 2 \end{cases}$ a) $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x)$; b) $\lim\limits_{x \to 2^-} g(x)$; c) $\lim\limits_{x \to 2^+} g(x)$

Encontrar los valores de k para que el límite exista.

$$2.1)\quad \lim_{x\to 1} f(x) \text{ donde } f(x) = \begin{cases} kx^2 + x, & \text{si } x \geq 1 \\ 2 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

$$2.2)\quad \lim_{x\to 2} g(x) \text{ donde } g(x) = \begin{cases} 2x - k^2, & \text{si } x < 2 \\ 5x, & \text{si } x = 2 \\ kx + 1, & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Respuestas
1.1 0; **1.2** a) -2 b) 1

1.3 a) 3; b) 5; c) 7;

2.1 k=1 **2.2** k=1; k=-3

3 *Dada la función* $h(x) = \begin{cases} ax + 5 & si\ x < -1; \\ x^2 + 1 & si\ -1 < x < 2; \\ mx + 6 & si\ x > 2, \end{cases}$

Dada $g(x) = \begin{cases} ax + 11 & \text{si } x < 3; \\ x^2 - 8x + 16 & \text{si } x > 3. \end{cases}$

Determinar el valor de la constante a que asegura la existencia de $\lim\limits_{x \to 3} g(x)$.

Ejemplo 3.3.2 *Dada la función* $g(x) = \begin{cases} 3x + 5 & si\ x < -1; \\ x^2 + 1 & si\ -1 < x < 2; \\ 6 - x & si\ x > 2, \end{cases}$

calcular (en caso de existir) cada uno de los límites siguientes:

1. $\lim_{x \to -1^-} g(x)$.
2. $\lim_{x \to -1^+} g(x)$.
3. $\lim_{x \to -1} g(x)$.
4. $\lim_{x \to 2^-} g(x)$.
5. $\lim_{x \to 2^+} g(x)$.
6. $\lim_{x \to 2} g(x)$.

Respuestas:

1. $\lim_{x\to -1^-} g(x) = \lim_{x\to -1^-} (3x+5) = 3(-1)+5 = -3+5 = 2.$

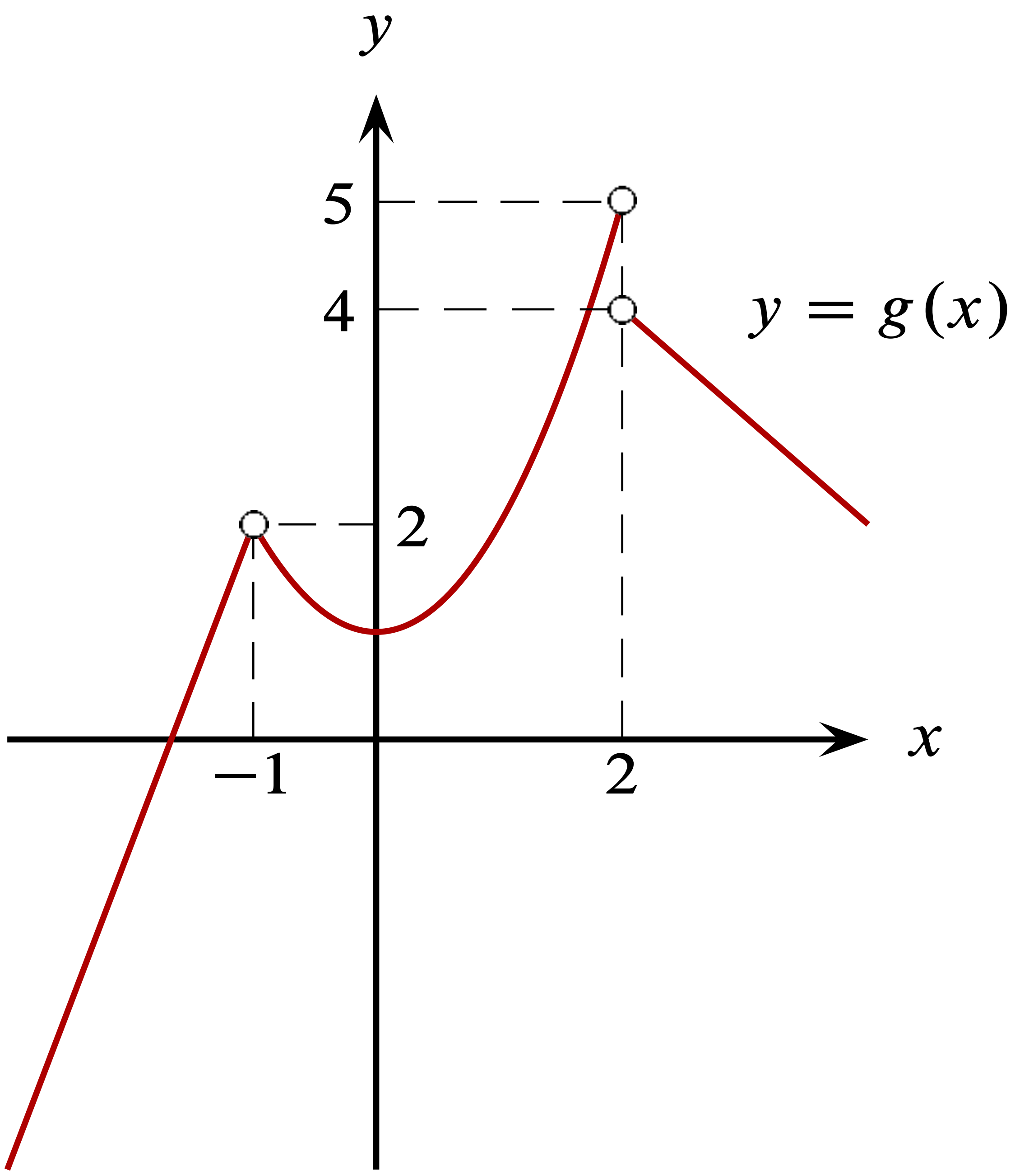
2. $\lim_{x\to -1^+} g(x) = \lim_{x\to -1^+} (x^2+1) = (-1)^2+1 = 1+1 = 2.$

3. Ya que $\lim_{x\to -1^-} g(x) = 2 = \lim_{x\to -1^+} g(x)$, entonces $\lim_{x\to -1} g(x) = 2.$

4. $\lim_{x\to 2^-} g(x) = \lim_{x\to 2^-} (x^2+1) = 2^2+1 = 4+1 = 5.$

5. $\lim_{x\to 2^+} g(x) = \lim_{x\to 2^+} (6-x) = 6-2 = 4.$

6. Ya que $\lim_{x\to 2^-} g(x) = 5 \neq 4 = \lim_{x\to 2^+} g(x)$, entonces $\lim_{x\to 2} g(x)$ no existe.



y
5
4
2
$y = g(x)$
x
−1
2

Continuidad de una función en un punto.-

Sea $y = f(x)$ una función real de variable real.
Sea $\boldsymbol{a}$ un número real.
En un sistema de ejes, podemos considerar $x = a$ un punto del eje de abcisas.
Vamos a definir un concepto nuevo: "***función continua en un punto***"

$$f(x) \text{ es continua en } x = a \Leftrightarrow \begin{cases} a) \; f(a) \text{ existe, es decir}, \; a \in D_f \\ b) \; \text{Existe } \lim\limits_{x \to a} f(x) \\ c) \; \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a) \end{cases}$$

Es decir, "*la función f es continua en x = a*" si verifica tres condiciones:

a) El número ***a*** pertenece al dominio de la función, esto es, $f(a)$ existe.

b) Existe (es un número finito) el límite de *f* cuando *x* tiende a ***a***.

c) Dicho límite coincide con la imagen de ***a***.

Cuando esto ocurre se dice que (algunas formas de decirlo):

"*la función f es continua en x = a*"
"*la función f es continua en a*"
"*la función f es continua en el punto x = a*"

Las funciones que no son continuas se llaman *discontinuas*. Hay varios tipos de discontinuidad dependiendo de la condición que no se cumple.

A) *Discontinuidad evitable:* Corresponde al caso en que la función tiene límite pero no coincide con el valor $f(c)$. Se llama evitable porque basta definir $f(c)$ como el límite de la función en c para que la función sea ahora continua.

B) *Discontinuidad de primera especie:* Puede ser de *salto finito* cuando existen los dos límites laterales pero son distintos, o de *salto infinito* cuando alguno de los límites laterales es infinito.

C) *Discontinuidad esencial o de segunda especie:* Si alguno de los dos límites laterales no existe.

Ejemplo 1.-

Sea la función $f(x) = x - 3$.

Queremos estudiar su continuidad en el punto $x = 5$.

Veamos:

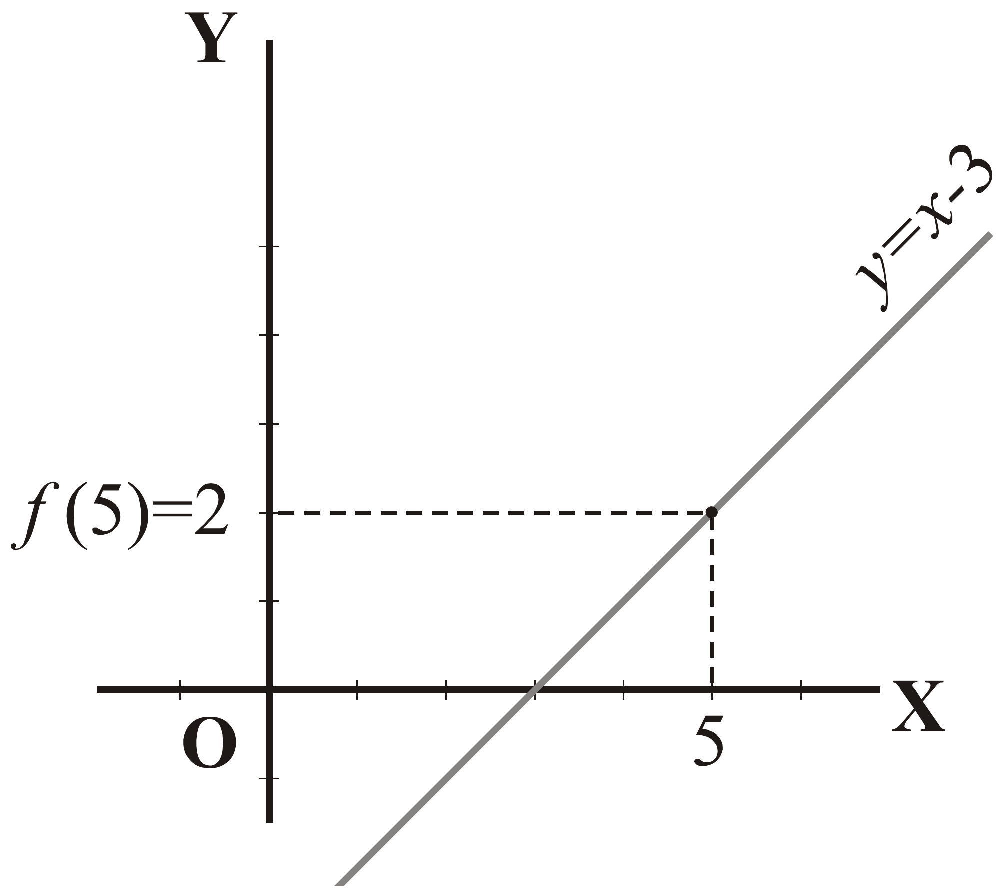
$$f(x) = x - 3 \text{ continua en } x = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} a) \ f(5) \text{ existe} \\ b) \ \lim\limits_{x \to 5} f(x) \text{ existe} \\ c) \ \lim\limits_{x \to 5} f(x) = f(5) \end{cases}$$

Analicemos cada una de las condiciones:

a) $f(5) = 5 - 3 = 2$. Por tanto, existe la imagen de 5, esto es, $5 \in D_f$

b) $\lim_{x \to 5} f(x) = \lim_{x \to 5} (x - 3) = 5 - 3 = 2$. Por tanto, existe el límite de f cuando x tiende a 5.

c) $\lim_{x \to 5} f(x) = f(5) = 2$



Entonces la función es continua en x=5

Ejemplo 2.-

Queremos estudiar la continuidad de $g(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}$ en el punto $x = 4$.

Veamos:

$$g(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4} \ \textit{continua en } x = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} a) \ g(4) \textit{ existe} \\ b) \ \lim\limits_{x \to 4} g(x) \textit{ existe} \\ c) \ \lim\limits_{x \to 4} g(x) = g(4) \end{cases}$$

Analicemos cada una de las condiciones:

a) $g(4) = \frac{4^2 - 16}{4 - 4} = \frac{16 - 16}{0} = \frac{0}{0} \notin R$

Por tanto, 4 no tiene imagen. Recordemos que las igualdades anteriores no son igualdades numéricas

Ya podemos asegurar que la función g no es continua en el punto $x = 4$. No obstante vamos a comprobar las otras condiciones.

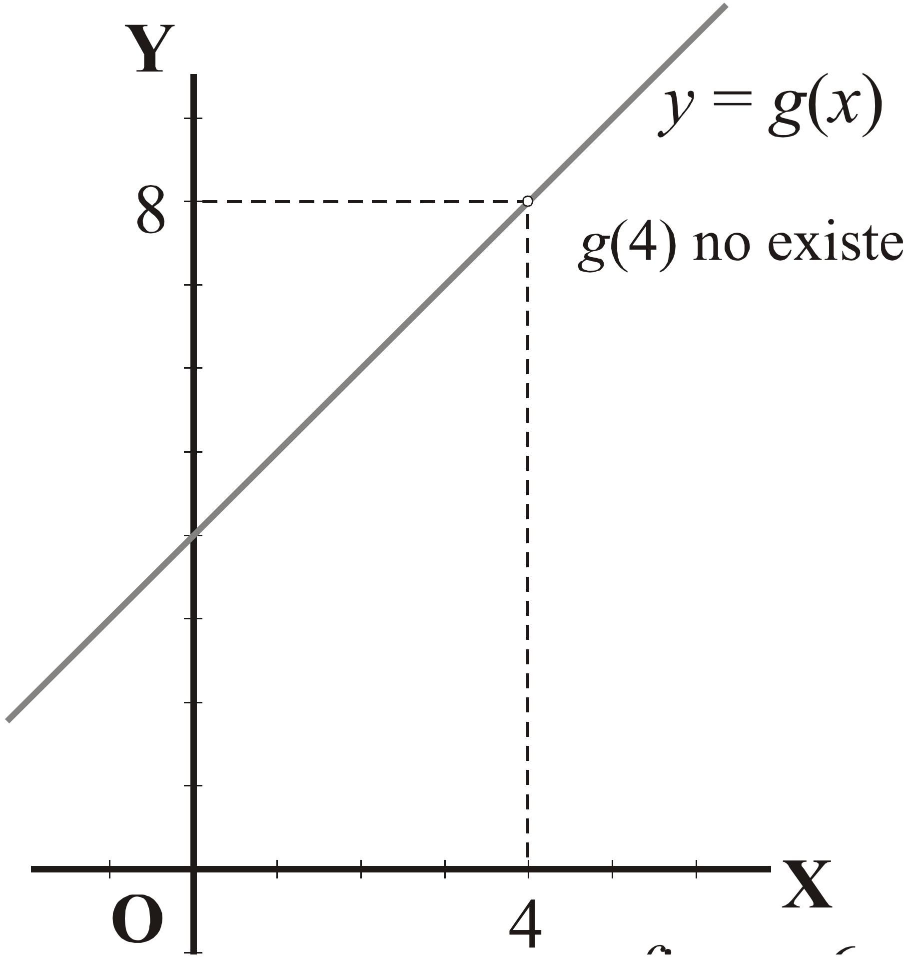
b) $\lim_{x \to 4} g(x) = \lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = \frac{4^2 - 16}{4 - 4} = \frac{0}{0}$ Indeterminado

Salvemos la indeterminación factorizando (descomponiendo en factores) el numerador:

$$\lim_{x \to 4} g(x) = \lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = \lim_{x \to 4} \frac{(x+4)\cdot(x-4)}{x - 4} = \lim_{x \to 4} (x + 4) = 4 + 4 = 8$$

Por tanto, el límite de $g(x)$ cuando x tiende a 4, existe y vale 8.

c) La condición c) no se cumple por no existir $g(4)$.



en el punto de abcisa $x = 4$, punto en el que la función g presenta una discontinuidad evitable.
Si queremos que la función sea continua, podemos definir la función siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4} & si \ \ x \neq 4 \\ 8 & si \ \ x = 4 \end{cases}$$

Ejemplo 3.-

Sea la función $g(x) = \begin{cases} -\dfrac{3}{2}x - 6 & si \;\; x < -2 \\ \dfrac{3}{2}x & si \;\; x \geq -2 \end{cases}$ Queremos estudia la continuidad en $x = -2$

Veamos:

$$g(x) \; es \; continua \; en \; x = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} a) \; g(-2) \;\; existe \\ b) \; \lim\limits_{x \to -2} g(x) \;\; existe \\ c) \; \lim\limits_{x \to -2} g(x) = g(-2) \end{cases}$$

Estudiemos la condición *a*) :

$$g(-2) = \frac{3}{2}(-2) = -3$$. Por tanto, la imagen de -2 existe y vale -3.

Estudiemos la condición *b*) :

En este caso es necesario hallar los límites laterales.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -2^-} g(x) = \lim\limits_{x\to -2^-}\left(\frac{-3}{2}x - 6\right) = \frac{-3}{2}\left(-2^-\right) - 6 = 3 - 6 = -3 \\ \lim\limits_{x\to -2^+} g(x) = \lim\limits_{x\to -2^+} \frac{3}{2}x = \frac{3}{2}\left(-2^-\right) = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to -2} g(x) = -3$$

Por tanto, existe el límite de $g(x)$ cuando x tiende a -2 y su valor es -3.

Estudiemos la condición *c*) :

$$\lim_{x\to -2} g(x) = g(-2) = -3$$

Conclusión : La función g es continua en el punto $x = -2$

Dibujemos la gráfica de $g(x)$:

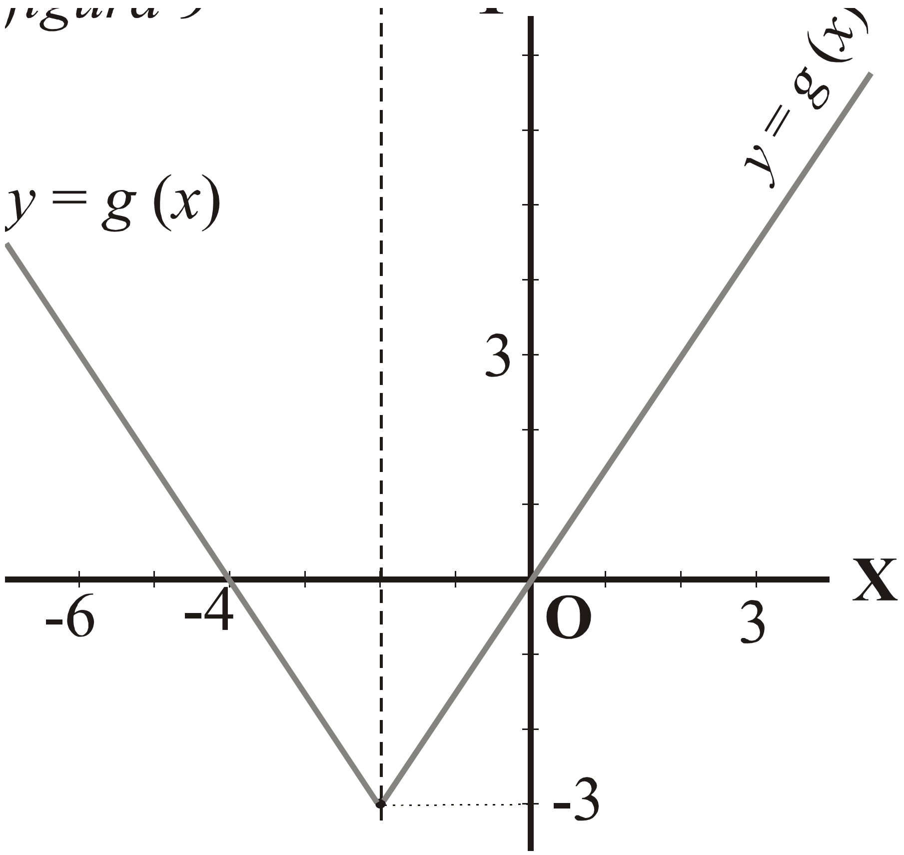


figura 9
y = g (x)
y = g (x)
3
-3
-6
-4
O
3
X

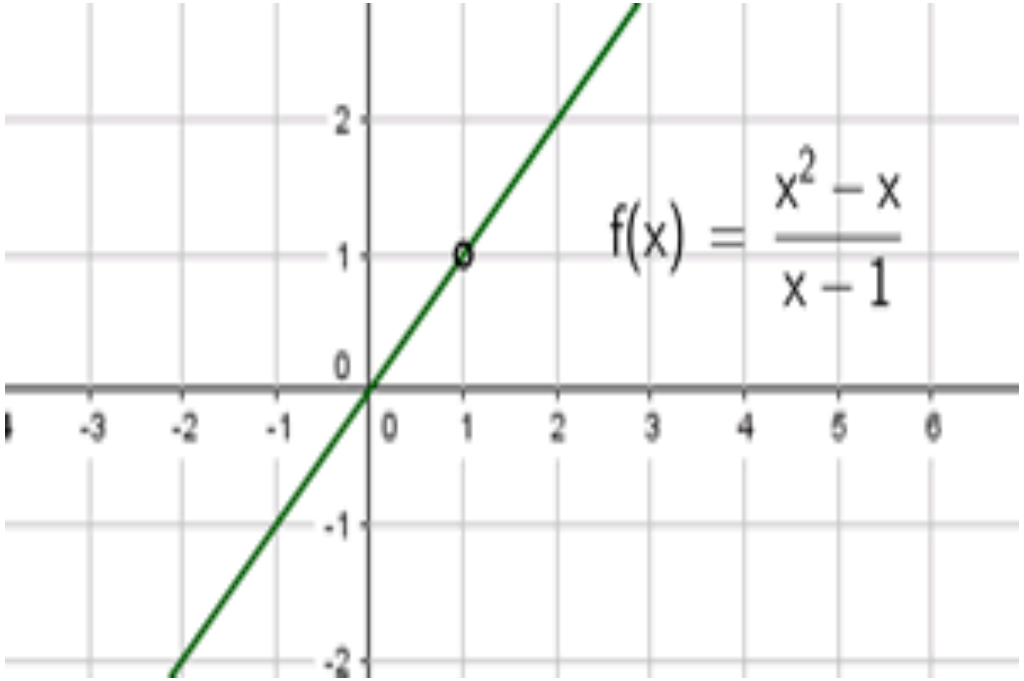
1. Estudiar la continuidad de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x - 1}$ en $x = 1$

1. $\exists\, f(a)$

Calculamos el dominio de f(x)

$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{1\}$

La función es discontinua en $x = 1 \rightarrow \nexists f(1)$



2. $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x)$

$$\lim_{x \to 1} = \frac{x^2 - x}{x - 1} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminación.}$$

$$\lim_{x \to 1} = \frac{x^2 - x}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x(x-1)}{(x-1)} = \lim_{x \to 1} x = 1.$$

Existe el límite de la función en $x = 1$ y vale 1.

3. Discontinuidad evitable en $x = 1$, la función no tiene imagen en $x = 1$ pero si tiene límite. (ver gráfica)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x}{x - 1} & si\ x \neq 1 \\ 1 & si\ \ x = 1 \end{cases}$$

2. Calcular el valor de a para que la siguiente función se continua: $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x\leq 1 \\ 3-ax^2 & \text{si } x>1 \end{cases}$

Continuidad en $x = 1$

1. $\exists f(1) \longrightarrow f(1)=x+1 = 2$

2. Calculamos los límites laterales

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} x+1=2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} 3-ax^2=3-a \end{cases}$$

Para que la función sea continua en $x = 1$ los límites laterales tienen que ser iguales $\longrightarrow \ 2=3-a \ \longrightarrow a=1$

3. Si $a=1 \longrightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} = \lim\limits_{x\to 1^+} = f(1)=2$

La función es continua en $x = 1$

4. Estudiar la continuidad de la función

$$f(x)=\begin{cases} x+5 & \text{si} \quad x \le -2 \\ x^2-1 & \text{si} \quad -2 < x \le 1 \\ x+2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$ y representarla.

Continuidad en $x = -2$

1. $\exists f(a) \rightarrow f(-2) = x+5 = 3 \rightarrow$ Existe $f(-2)$

2. Límites laterales

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to -2^-} x+5 = 3 \\ \lim\limits_{x\to -2^+} x^2-1 = 3 \end{cases}$$ Existe límite en $x = -2$ y vale 3

3. $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a) \Rightarrow \lim\limits_{x\to -2^-} = \lim\limits_{x\to -2^+} = f(-2) = 3$

Se cumplen las 3 condiciones y por lo tanto la función es continua en $x = -2$.

Ejercicios

a) $f(x) = \begin{cases} 5x^2 & \text{si } \; x \le 1 \\ 2x+3 & \text{si } \; x > 1 \end{cases}$ en el punto $x = 1$.

b) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 & \text{si } \; x \ne 1 \\ 0 & \text{si } \; x = 1 \end{cases}$ en el punto $x = 1$.