Valores de la primera derivada

$f'(x) = 0 \rightarrow$ Puede haber máximos o mínimos relativos.

$f'(x) > 0 \rightarrow$ Función creciente en ese intervalo.

$f'(x) < 0 \rightarrow$ Función decreciente en ese intervalo.

Ejercicios resuelto

Función polinómica

Observa los pasos y las aplicaciones de las derivadas para calcular el crecimiento y decrecimiento, los máximos y mínimos de una función polinómica.

Dada la función $\mathbf{f(x)=x^3-6x+9x+4}$, estudia su crecimiento y decrecimiento.

¿Tiene f(x) máximos o mínimos?. Si los tiene halla sus coordenadas.

1. Derivada primera de la función

Hacemos la derivada primera de la función. La igualamos a 0 y resolvemos la ecuación resultante. Si la ecuación tiene solución, en esos puntos de x **puede haber** máximos o mínimos locales.

También se llaman extremos relativos, puntos singulares o puntos críticos.

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$

Derivada primera $\Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

Igualamos la derivada a 0 y resolvemos la ecuación.

$3x^2 - 12x + 9 = 0 \quad \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2} = \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

En estos puntos puede haber máximos o mínimos relativos.

2. Crecimiento y decrecimiento

Trazamos una recta y marcamos los valores de x que me anulan la derivada. La recta queda dividida en intervalos. Tomamos valores de x comprendidos en cada intervalo, los sustituimos en la derivada y vemos su signo.

$f'(x) > 0 \quad \rightarrow$ Función creciente en ese intervalo.

$f'(x) < 0 \quad \rightarrow$ Función decreciente en ese intervalo.

La función es creciente en aquellos intervalos donde el signo de la función derivada es positivo. Es decreciente en el intervalo donde la función derivada es negativa.

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \quad \rightarrow \quad f'(3) = 0$ y $f'(1) = 0$

Trazamos una recta, marcamos los valores 1 y 3 que me anulan la derivada primera.

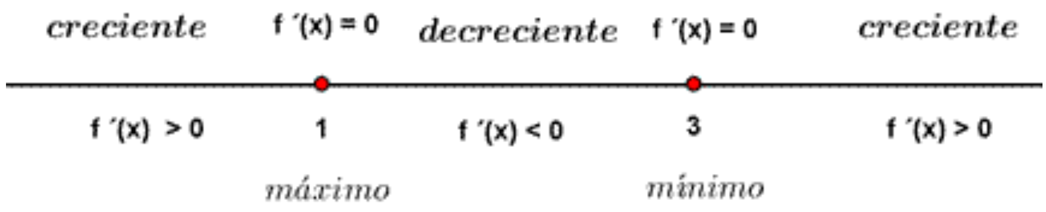
La recta nos queda dividida en 3 intervalos.

Tomamos un valor de x para cada intervalo y lo sustituimos en la derivada para ver su signo.

Intervalo $(-\infty, 1]$ $\quad x = 0 \quad \Rightarrow f'(0) = 9$ función creciente

Intervalo $[1, 3]$ $\quad x = 2 \quad \Rightarrow f'(2) = -3$ función decreciente.

Intervalo $[3, +\infty)$ $\quad x = 4 \quad \Rightarrow f'(4) = 9$ función decreciente.



3. Máximos y mínimos $\Rightarrow$ f ´(x) = 0

Deducimos si es máximo o mínimo estudiando el crecimiento y decrecimiento.

Máximo local $\rightarrow$ creciente – decreciente.

En ese valor de x donde f ´(x) = 0 hay un máximo.

Mínimo local $\rightarrow$ decreciente – creciente.

En ese valor de x donde f ´(x) = 0 hay un mínimo.

Si sale creciente – creciente o decreciente – decreciente no hay máximos ni mínimos.

Los máximos y mínimos son puntos de la función necesito las dos coordenadas (x,y).

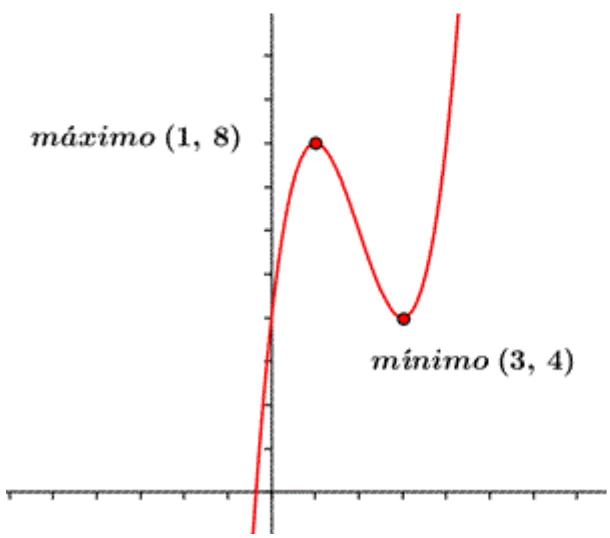
Para calcular la coordenada "y" de los máximos y mínimos sustituimos el valor de x en la función.

x = 1 $\Rightarrow$ creciente – decreciente $\Rightarrow$ máximo local o relativo

f(1) = 8 $\Rightarrow$ Coordenadas (1,8)

x = 3 $\Rightarrow$ decreciente – creciente $\Rightarrow$ mínimo local o relativo

f(3) = 4 $\Rightarrow$ Coordenadas (3,4)



Dada la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$, halla sus puntos singulares.

- Derivada

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1} \quad \Rightarrow f'(x) = \frac{-1 \cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2} \quad \Rightarrow f'(x) = \frac{-2x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$f'(x) = 0 \ \Rightarrow \ \frac{-2x}{\left(x^2+1\right)^2} = 0 \quad \Rightarrow -2x = 0 \quad \Rightarrow x = 0$$

En $x = 0$ puede haber máximo o mínimo relativo.

- Crecimiento y decrecimiento

Trazamos una recta y marcamos el cero.

Sustituimos $x = -1$ en la derivada para ver su signo en el intervalo $(-\infty,\ 0)$

$$f'(-1) = \frac{-2 \cdot (-1)}{\left((-1)^2+1\right)^2} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow f'(-1) > 0 \ \text{ función creciente}$$

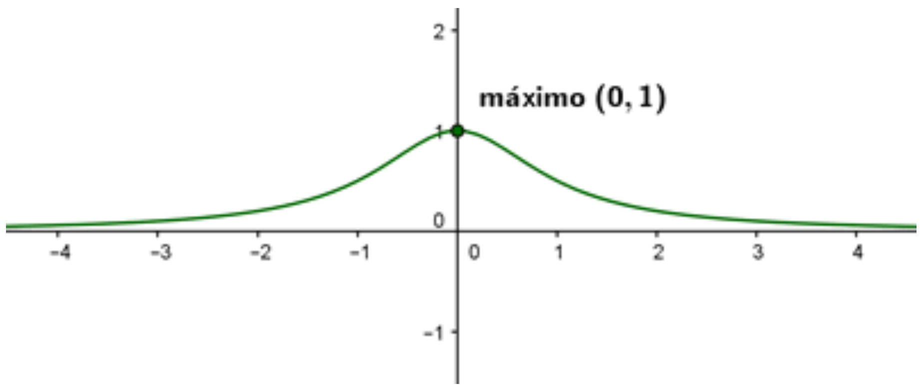
Sustituimos $x = 1$ en la derivada para ver su signo en el intervalo $(0,+\infty) \ \Rightarrow \ f'(1) < 0$ función decreciente

$$-\infty \quad \underline{\overline{f'(-1) > 0 \ \text{ creciente}} \quad 0 \quad \overline{f'(1) < 0 \ \text{ decreciente}}} \quad +\infty$$

$\cap$ máximo

- Máximo local en $x = 0$

$f(0) = 1 \quad \Rightarrow$ Coordenadas del máximo $(0,1)$



máximo $(0, 1)$