

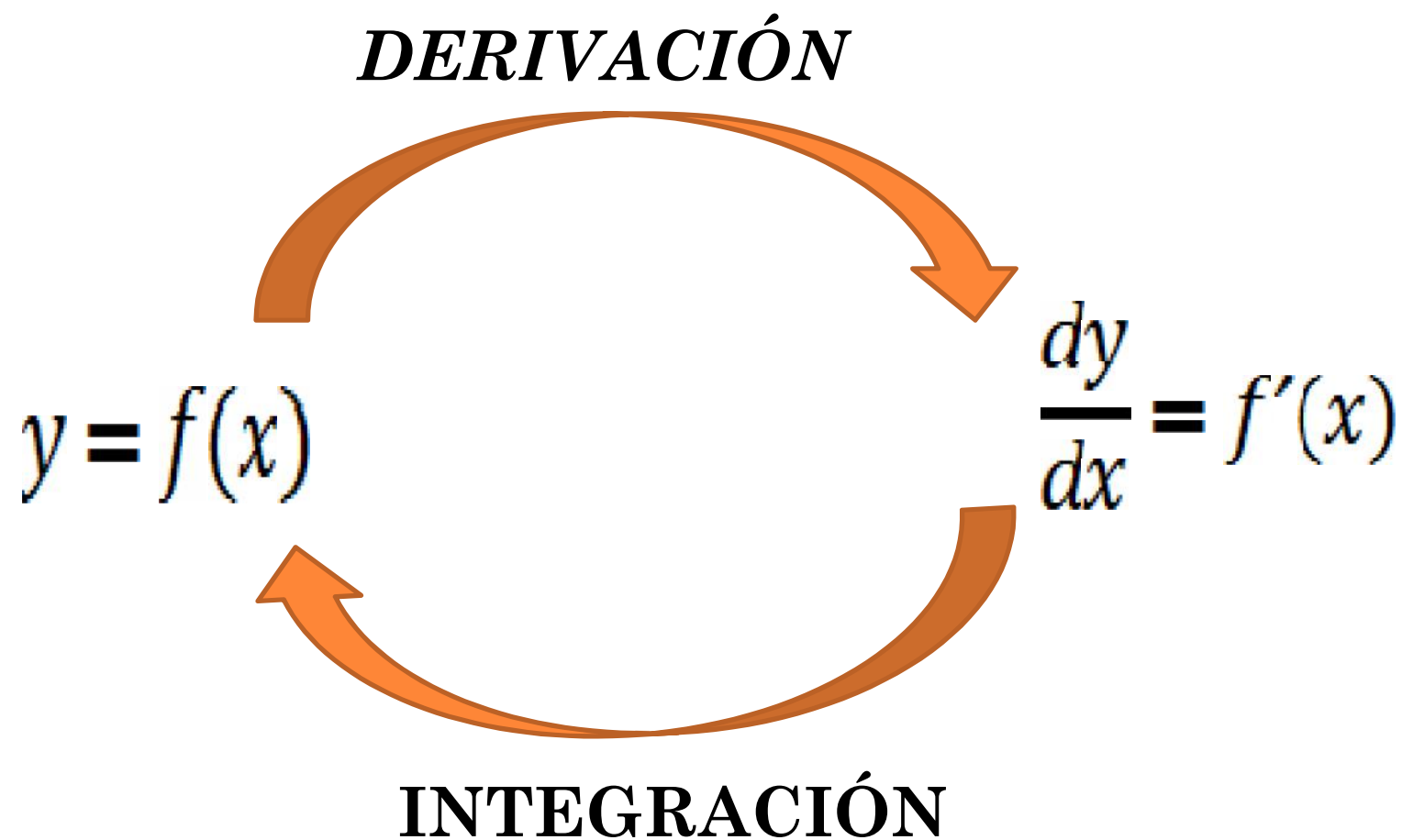
CÁLCULO III
CÁLCULO INTEGRAL
Profesor Sergio Jopia Valencia

DEFINICIÓN

- Concepto de operador inverso:
 - Adición ----- Sustracción
 - Multiplicación-----División
 - Potenciación-----Radicación
 - Diferenciación-----Integración.
- Por lo tanto podemos decir que la integración es la operación inversa de la diferenciación, o bien, que el Cálculo Integral es el opuesto al Cálculo Diferencial.



* ESQUEMA:



PRIMITIVA DE UNA FUNCIÓN O SIMPLEMENTE PRIMITIVA

- Concepto:
- Se dice que la función primitiva que se busca es la INTEGRAL de su DERIVADA.
- Entonces podemos definir que la INTEGRAL de una función dada es toda función que tiene por *derivada* la función dada.



DERIVACIÓN

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

Primitiva

$$y = f(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

INTEGRACIÓN

$$f(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$



CALCULO DE PRIMITIVAS:

$f(x) = \frac{x^3}{3}$ Su derivada es _____ ; Su integral o primitiva _____

$$g(x) = \frac{x^3}{3} + 7$$

$$t(x) = \frac{x^3}{3} + 5$$



INTEGRAL INDEFINIDA.

Se habla de INTEGRAL INDEFINIDA al conjunto de todas las funciones $F(x)$ que tienen la misma derivada y simbólicamente se indica

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

$\int$: símbolo de integral

$f(x)$: función integrando

dx : diferencial ; variable de integración



EJERCICIOS:

La diferencial de una función $f(x)$ es $(3x-2) dx$. Determinar la función $f(x)$, que tiene el valor 10, cuando $x=-1$



PROPIEDADES DE LA INTEGRACIÓN

Para hallar la antiderivada F es necesario efectuar un proceso inverso al de la derivación. A este proceso se lo denomina integración y se denota:

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) \rightarrow dF(x) = f(x)dx \rightarrow F(x) = \int f(x) dx + C$$

Integrales de Funciones Elementales

a) $\int 1 \cdot dx = x + C$

b) $\int A \cdot dx = Ax + C$ *A constante*

c) $\int x^n \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ *para todo $n \neq -1$*

d) $\int \frac{1}{x} \cdot dx = \ln(x) + C$

e) $\int a^x \cdot dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$

f) $\int e^x \cdot dx = e^x + C$

g) $\int e^{ax} \cdot dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C$

Ejemplos:

$$1. \int 3x dx = 3 \int x dx = 3 \left(\frac{x^2}{2} \right) + C = \frac{3}{2} x^2 + C$$

$$2. \int (3x^2 + 2x) dx = \int 3x^2 dx + \int 2x dx = \frac{3}{3} x^3 + \frac{2}{2} x^2 + C = x^3 + x^2 + C$$

$$3. \int \frac{1}{x^3} dx = \int x^{-3} dx = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$$

$$4. \int \sqrt{x} dx = \int x^{1/2} dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{3} x^{3/2} + C$$

$$5. \int \frac{3x^2 - 4}{x^2} dx = \int (3 - 4x^{-2}) dx = 3x + \frac{4}{x} + C$$



Calcule las siguientes integrales:

a) $\int x^2 \cdot dx =$

b) $\int 16 \cdot dx =$

c) $\int x^{\frac{1}{3}} \cdot dx =$

d) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot dx =$



ALGEBRA DE INTEGRALES

Propiedades de las Integrales

Sean A constante, $f(x)$ y $g(x)$ funciones, entonces:

$$1. \int A \cdot f(x) dx = A \cdot \int f(x) dx$$

$$2. \int (f \pm g)(x) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$



Calcule las siguientes integrales:

a) $\int \left(3x^2 + 5x + \frac{1}{2x} + 1 \right) dx$

b) $\int \frac{3x^3 - 2x^2 + 7x - 1}{x} dx$

c) $\int \left(3e^x + \frac{1}{2 \cdot \sqrt[3]{x}} + 5^x \right) dx$

d) $\int \left(\frac{1}{2x^2} + \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{2x}} \right) dx$

e) $\int (6ax^2 - 4bx + z^2) dx$



MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

4.5 Integración por sustitución

Se trata de un “método de integración”, es decir, cuando no podemos aplicar directamente las *fórmulas de integración*, debemos usar alguna herramienta para obtener la integral pedida. Una de esas herramientas es la *integración por sustitución*.

Empecemos con un ejemplo,

Calcular $\int 2x(x^2 + 1)dx$.



Ejemplos

$$1. \int 3(3x - 1)^4 dx = \frac{(3x - 1)^5}{5} + C$$

$$2. \int (2x + 1)(x^2 + x) dx = \frac{(x^2 + x)^2}{2} + C$$

$$3. \int 3x^2 \sqrt{x^3 - 2} dx = \frac{(x^3 - 2)^{3/2}}{3/2} + C$$

$$4. \int \frac{-4x}{(1 - 2x^2)} dx = \frac{(1 - 2x)^{-1}}{-1} + C.$$

