Clase II

Calculo III

Encuentre la función primitiva de cada una de las siguientes derivadas.

a) $\dfrac{dy}{dx} = 2x$; $f(0) = 2$

b) $\dfrac{dy}{dx} = e^x + 3x^2 - 6x$; $f(0) = 3$

c) $\dfrac{dy}{dx} = -6x + \dfrac{2}{x}$; $f(1) = 4$

d) $\dfrac{dy}{dx} = 2^x$; $f(0) = 7{,}443$

Aplicaciones de funciones primitivas.

Un fabricante determina que el costo marginal es $3q^2 - 60q + 400$ dólares por unidad cuando se producen q unidades. El costo total de producción de las primeras 2 unidades es 900 dólares. ¿Cuál es el costo total de producción de las primeras 5 unidades?

Se ha determina que dentro de t años la población de una cierta ciudad cambiará a razón de $\frac{dP}{dt} = 4 + 5t^{\frac{2}{3}}$ personas por año. Si la población actual es de 10.000, ¿Cuál será la población dentro de ocho años?

Un fabricante estima que el costo marginal por producir q unidades de cierto bien es $CM(q) = 3q^2 - 24q + 48$ dólares por unidad. Si el costo de producción de 10 unidades es de 5.000 dólares. ¿Cuál es el costo de producción de 30 unidades?

Una ecologista encuentra que cierto tipo de árbol crece de tal forma que su altura $h(t)$ después de t años cambia a una razón de:

$$h'(t) = 0{,}2\, t^{\frac{2}{3}} + \sqrt{t} \quad \frac{metros}{año}$$

Si cuando se plantó el árbol éste tenía una altura de 2 metros. ¿Cuál será su altura dentro de 27 años?

Método de sustitución.

Ejemplos

1. $\int 3(3x-1)^4 dx = \frac{(3x-1)^5}{5} + C$

2. $\int (2x+1)(x^2+x)dx = \frac{(x^2+x)^2}{2} + C$

3. $\int 3x^2\sqrt{x^3-2}dx = \frac{(x^3-2)^{3/2}}{3/2} + C$

4. $\int \frac{-4x}{(1-2x^2)}dx = \frac{(1-2x)^{-1}}{-1} + C$.

a) $\int xe^{-x^2}\ dx$

b) $\int \frac{2y^4}{y^5-1}\, dy$

c) $\int \sqrt{3x+7}\ dx$

d) $\int 8x(4x^2-3)^5\ dx$

Ejemplos resueltos.

-Encontrar: $\int \sqrt{1+y^4}\, y^3 dy$

Solución.-Sea la sustitución: $w = 1 + y^4$, donde: $dw = 4y^3 dy$

Dado que: $\int \sqrt{1+y^4}\, y^3 dy = \frac{1}{4}\int (1+y^4)^{1/2} 4y^3 dy$

Se tiene que: $\frac{1}{4}\int (1+y^4)^{1/2} 4y^3 dy = \frac{1}{4}\int w^{1/2} dw$, integral que es inmediata.

Luego: $\frac{1}{4}\int w^{1/2} dw = \frac{1}{4}\frac{w^{3/2}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{6} w^{3/2} + c = \frac{1}{6}(1+y^4)^{3/2} + c$

Respuesta: $\int \sqrt{1+y^4}\, y^3 dy = \frac{1}{6}(1+y^4)^{3/2} + c$

·**Encontrar:** $\int \frac{x^2+1}{x-1}dx$

Solución.- Cuando el grado del polinomio dividendo es MAYOR o IGUAL que el grado del polinomio divisor, es necesario efectuar previamente la división de polinomios. El resultado de la división dada es:

$$\frac{x^2+1}{x-1}=(x+1)+\frac{2}{x-1},\ \text{Luego: } \int \frac{x^2+1}{x-1}dx = \int\left(x+1+\frac{2}{x-1}\right)dx=\int xdx+\int dx+2\int\frac{dx}{x-1}$$

Sea $u=x-1$, donde $du=dx$

Luego: $\int xdx+\int dx+2\int\frac{dx}{x-1}=\int xdx+\int dx+2\int\frac{du}{u}=\frac{x^2}{2}+x+\ell\eta\left|x-1\right|+c$

Respuesta: $\int \frac{x^2+1}{x-1}dx=\frac{x^2}{2}+x+\ell\eta\left|x-1\right|+c$

·**Encontrar:** $\int \frac{x^2-5x+6}{x^2+4}dx$

Solución.- $\frac{x^2-5x+6}{x^2+4}dx = 1+\frac{2-5x}{x^2+4}$

Luego: $\int \frac{x^2-5x+6}{x^2+4}dx = \int (1+\frac{2-5x}{x^2+4})dx = \int dx + 2\int \frac{dx}{x^2+4} - 5\int \frac{xdx}{x^2+4}$

Sea: $u = x^2+4$, donde: $du = 2xdx$; Entonces:

$$= x + \operatorname{arc}\tau g\,\frac{x}{2} - \frac{5}{2}\int \frac{du}{u} = x + \operatorname{arc}\tau g\,\frac{x}{2} - \frac{5}{2}\ell\eta\left|u\right| + c = x + \operatorname{arc}\tau g\,\frac{x}{2} - \frac{5}{2}\ell\eta\left|x^2+4\right| + c$$

Respuesta: $\int \frac{x^2-5x+6}{x^2+4}dx = x + \operatorname{arc}\tau g\,\frac{x}{2} - \frac{5}{2}\ell\eta\left|x^2+4\right| + c$

Integración por método de sustitución.
Ejercicios de clases.

$$\int \frac{x dx}{3x^2 - 4} =$$

$$\int \sqrt{1+y^4}\, y^3 dy$$

$$\int \frac{x^2+1}{x-1} dx =$$

$$\int \frac{8x\, dx}{(2x^2+5)^2} =$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{9x-1}} =$$