2

Manual de fracciones parciales

Xavier Espinoza

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA SALESIANA

Universidad Politécnica Salesiana

MANUAL DE FRACCIONES PARCIALES

Xavier Espinoza

Xavier Espinoza

MANUAL DE FRACCIONES PARCIALES

2012

ABYA YALA | UNIVERSIDAD POLITÉCNICA SALESIANA

IUS
INSTITUCIONES SALESIANAS DE EDUCACIÓN SUPERIOR

MANUAL DE FRACCIONES PARCIALES

Xavier Espinoza

1era. edición:	© Editorial Universitaria Abya-Yala
	Casilla: 2074 P.B.X.: (+593 7) 2 862213 Fax: (+593 2) 4 088958 e-mail: rpublicas@ups.edu.ec www.ups.edu.ec Cuenca-Ecuador
	Secretaría Técnica de Investigación UNIVERSIDAD POLITÉCNICA SALESIANA Casilla: 2074 P.B.X.: (+593 7) 2 862213 Cuenca-Ecuador
Diseño y Diagramación en LaTeX:	Andrés Merino. Editorial Universitaria Abya-Yala
Impresión:	Editorial Universitaria Abya-Yala
ISBN UPS:	978-9978-10-098-1

Impreso en Quito-Ecuador, marzo 2012

Índice general

Introducción

Este es un manual fundamental en la formación científica y técnica de cualquier profesionista, en particular, de los que se forman en la Universidad Politécnica Salesiana. Provee una visión de conjunto de la matemática como herramienta para representar y estudiar los procesos de cambio e integra tres métodos para hacerlo: el de las ecuaciones, el de las coordenadas y el del límite. Permite, al iniciarse la formación profesional o al terminar la preuniversitaria, reconocer en el cálculo infinitesimal un instrumento de análisis de los fenómenos y un lenguaje preciso y claro para la ciencia.

En particular, el que se imparta en el propedéutico, obedece a la necesidad educativa planteada por la heterogeneidad en la formación de los estudiantes que ingresan a este nivel.

El curso parte de la premisa de que el alumno ha aprehendido los elementos de álgebra, geometría y geometría analítica, básicos para comprender los conceptos y usar las herramientas del cálculo.

Suele pasar, por ejemplo, que cuando se tiene necesidad de resolver integrales que no son posibles resolverlas por métodos comunes, es indispensable usar fracciones parciales; las mismas que se dan en cuatro casos:

1. Fracciones lineales distintas.
2. Fracciones lineales iguales.
3. Fracciones cuadráticas distintas.
4. Fracciones cuadráticas iguales.

Objetivos generales

Propiciar el desarrollo de la visión del mundo que dan las ciencias; en particular, reconocer que la matemática es un lenguaje preciso y claro que permite plantear hipótesis respecto a la estructura y la dinámica de la naturaleza.

Desarrollar habilidades de solución de ejercicios matemáticos fundamentados en conocimientos previos como descomposición de factores y demás.

Fracciones Parciales

El uso de las fracciones parciales ha permitido solucionar múltiples problemas en el Algebra Superior y de ahí su importancia en aprenderlas. El presente manual tiene como objetivo iniciar su estudio, el cual se logrará en función de los ejercicios resueltos que se propone.

¿Qué es una fracción parcial?

Una fracción parcial para aplicarla a un ejercicio y darle solución está sujeta a casos, los mismos que son:

1. Cuando el 'denominador' de la fracción es de primer grado y no está repetido

$$ax + b \to \frac{A}{ax+b};$$

   siendo A el contenido a determinarse.

2. Cuando el 'denominador' de la fracción es de primer grado y está repetido

$$(ax+b)^k \to \frac{A}{ax+b} + \frac{B}{(ax+b)^2} + \frac{C}{(ax+b)^3} + \cdots;$$

   en donde, $A,\ B,\ C$ son el contenido a determinarse.

3. Cuando el 'denominador' de la fracción es de segundo grado y no está repetido

$$ax^2 + bx + c \to \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c};$$

donde A y B son las constantes a determinarse.

4. Cuando el 'denominador' de la fracción es de segundo grado y está repetido

$$(ax^2 + bx + c)^k \to \frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)} + \frac{Cx + D}{(ax^2 + bx + c)^2} + \frac{Ex + F}{(ax^2 + bx + c)^3} + \cdots;$$

donde $A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F$ son constantes a determinarse.

Explicación de los casos

1. **Primer caso**. Si el grado del numerador es un grado menor que el denominador, conviene expresar el denominador como un producto de factores, por lo que se debe factorarlo. Aquí se puede hacer uso de la tabla 1.

2. **Segundo caso**. Si el grado del numerador es igual o mayor al del denominador, la fracción debe reducirse a una expresión mixta dividiendo el numerador para el denominador. Para ello se aplica el 'Teorema de la División' (Prueba de la división):

$$\frac{P(x)}{D(x)} \to \frac{P(x)}{R(x)} \frac{D(x)}{Q(x)}$$

$$\frac{P(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$

Procedimiento

1. *Analizar la Fracción Parcial:* Se verifica que el polinomio del numerador sea de menor grado que el denominador. En caso de no serlo se transforma la fracción a una forma mixta, usando el Teorema de la División (Prueba de la división).

2. *Factorar el denominador si no lo está.* Siempre es conveniente tener el denominador en su forma factorada.

3. *Determinar las constantes.* Dependiendo del sistema de ecuaciones que se obtenga se procede a resolverlo para determinar el valor de las constantes del sistema.

4. *Reemplazar las constantes.* Finalmente se sustituyen los valores de las constantes determinadas para la expresión.

Factor	**Forma del Factor**	**Forma de la Fracción Parcial**
0	$A = \text{constante}$	No existe
1	$(ax+b)$	$\dfrac{A}{ax+b} \to$ Cte. A a determinarse
1	$(ax+b)^n$	$\dfrac{A}{ax+b} + \dfrac{B}{(ax+b)^2} + \dfrac{C}{(ax+b)^3} + \cdots$
2	(ax^2+bx+c)	$\dfrac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$
2	$(ax^2+bx+c)^n$	$\dfrac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)} + \dfrac{Cx+D}{(ax^2+bx+c)^2} + \dfrac{Ex+F}{(ax^2+bx+c)^3} + \cdots$
3	(ax^3+bx^2+cx+d)	$\dfrac{Ax^2+Bx+C}{ax^3+bx^2+cx+d}$
3	$(ax^3+bx^2+cx+d)^n$	$\dfrac{Ax^2+Bx+C}{ax^3+bx^2+cx+d} + \dfrac{Dx^2+Ex+F}{(ax^3+bx^2+cx+d)^2} + \cdots$

Tabla 1: Casos de fracciones parciales

Ejercicios

Ejercicios de aplicación

• *Ejemplos para el primer caso*

$$f(x) = \frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}$$

se factora el denominador:

$$x^3+x^2-2x = x(x^2+x-2) = x(x-1)(x+2).$$

Se sustituye la expresión factorada nuevamente en el denominador:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2x+3}{x(x-1)(x+2)} \\ &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2} \\ &= \frac{A(x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-1)}{x(x-1)(x+2)}. \end{aligned}$$

Se simplifican los denominadores y se reducen términos:

$$\begin{aligned} 2x+3 &= Ax^2+Ax-2A+Bx^2+2Bx+Cx^2-Cx \\ &= (A+B+C)x^2+(A+2B-C)x-2A. \end{aligned}$$

Sistemas de ecuaciones

$$A + B + C = 0, \tag{1}$$
$$A + 2B - C = 2, \tag{2}$$
$$-2A = 3. \tag{3}$$

Despejando A de (3)

$$A = -\frac{3}{2}.$$

Operando (1) y (2)

$$2A + 3B = 2. \tag{4}$$

Sustituyendo A en (4)

$$\begin{aligned} 2A + 3B &= 2 \\ 2 - \frac{3}{2} + 3B &= 2 \\ 3B &= 2 + 3 \\ B &= \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

Sustituyendo C en (1)

$$\begin{aligned} A + B + C &= 0 \\ -\frac{3}{2} + \frac{5}{3} + C &= 0 \\ C &= -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores en la expresión:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2} \\ &= -\frac{3}{2x} + \frac{5}{3(x-1)} - \frac{1}{6(x+2)}. \end{aligned}$$

• *Ejemplos para el segundo caso*

$$f(x) = \frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 6x + 5}$$

Al ser el numerador y el denominador del mismo grado se utiliza el Algoritmo de Euclides (prueba de la división) para convertir la fracción en expresión mixta.

$$\begin{array}{rl} x^2 - 8x + 15 & \underline{\big|\ x^2 - 6x + 5} \\ \underline{-x^2 + 6x - \ \ 5} & \ 1 \\ -2x + 10 & \end{array}$$

Luego

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 6x + 5} \\ &= 1 + \frac{-2x + 10}{x^2 - 6x + 5} \\ &= 1 + \frac{-2x + 10}{(x-5)(x-1)}. \end{aligned}$$

Así

$$\frac{-2x + 10}{(x-5)(x-1)} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x-1}.$$

Se resuelve la suma de fracciones y se simplifican los denominadores

$$\begin{aligned} \frac{-2x + 10}{(x-5)(x-1)} &= \frac{A(x-1) + B(x-5)}{(x-5)(x-1)} \\ -2x + 10 &= Ax - A + Bx - 5B \\ &= (A + B)x + (-A - 5B). \end{aligned}$$

Sistema de ecuaciones

$$A + B = -2, \tag{5}$$

$$-A - 5B = 10. \tag{6}$$

Sumando (5) y (6) se obtiene

$$\begin{aligned} -4B &= 8 \\ B &= -2. \end{aligned}$$

Sustituyendo en (5)

$$\begin{aligned} A - 2 &= -2 \\ A &= 0. \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores hallados en la expresión

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x-1} \\ &= 1 + \frac{0}{x-5} + \frac{-2}{x-1}. \end{aligned}$$

Ejercicios resueltos

• *Ejercicio 1:*

$$f(x) = \frac{2x-7}{6x^2-5x+1}$$

Descomponiendo el denominador en factores se obtiene

$$f(x) = \frac{2x-7}{(2x-1)(3x-1)}.$$

Luego

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2x-7}{(2x-1)(3x-1)} \\ &= \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{3x-1}. \end{aligned}$$

Se resuelve la suma de fracciones y se simplifican los denominadores

$$\frac{2x-7}{(2x-1)(3x-1)} = \frac{A(3x-1)+B(2x-1)}{(2x-1)(3x-1)}$$
$$2x-7 = 3Ax - A + 2Bx - B$$
$$= (3A+2B)x - (A+B).$$

Sistema de ecuaciones

$$3A + 2B = 2, \tag{7}$$
$$A + B = 7. \tag{8}$$

Multiplicando (8) por -3 se obtiene

$$-3A - 3B = -21. \tag{9}$$

Sumando (7) y (9) se obtiene

$$-B = -19$$
$$B = 19.$$

Reemplazando B en (9)

$$A + B = 7$$
$$A + 19 = 7$$
$$A = -12.$$

Sustituyendo los valores calculados en la expresión

$$f(x) = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{3x-1}$$
$$= \frac{-12}{2x-1} + \frac{19}{3x-1}.$$

- *Ejercicio 2:*

$$f(x) = \frac{2x^2-4x+1}{2x^3-x^2-2x+1}$$

Descomponiendo el denominador en factores se obtiene la expresión

$$f(x) = \frac{2x^2 - 4x + 1}{(2x-1)(x+1)(x-1)}.$$

Luego

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2x^2 - 4x + 1}{(2x-1)(x+1)(x-1)} \\ &= \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1}. \end{aligned}$$

Se resuelve la suma de fracciones y se simplifican los denominadores

$$\begin{aligned} &\frac{2x^2 - 4x + 1}{(2x-1)(x+1)(x-1)} \\ &\quad = \frac{A(x+1)(x-1) + B(2x-1)(x-1) + C(2x-1)(x+1)}{2x - 1x + 1x - 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{A(x^2-1) + B(2x^2 - 3x + 1) + C(2x^2 + x - 1)}{(2x-1)(x+1)(x-1)} \\ 2x^2 - 4x + 1 &= Ax^2 - A + 2Bx^2 - 3Bx + B + 2Cx^2 + Cx - C \\ &= (A + 2B + 2C)x^2 - (3B - C)x + (-A + B - C). \end{aligned}$$

Sistema de ecuaciones

$$A + 2B + 2C = 2, \tag{10}$$

$$3B - C = 4, \tag{11}$$

$$-A + B - C = 1. \tag{12}$$

Operamos (10) y (12)

$$\begin{aligned} A + 2B + 2C &= 2 \\ -A + B - C &= 1, \end{aligned}$$

y se obtiene

$$3B + C = 3. \tag{13}$$

Operamos (12) y (13)

$$\begin{aligned} 3B - C &= 4 \\ 3B + C &= 3, \end{aligned}$$

y se obtiene

$$\begin{aligned} 6B &= 7 \\ B &= \frac{7}{6}. \end{aligned}$$

Sustituimos el valor de B en (13)

$$\begin{aligned} 3\left(\frac{7}{6}\right) + C &= 3 \\ \frac{7}{2} + C &= 3 \\ C &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Sustituimos el valor de B y C en (12)

$$\begin{aligned} -A + \frac{7}{6} + \frac{1}{2} &= 1 \\ -A + \frac{5}{3} &= 1 \\ A &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores de A, B y C en la expresión

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1} \\ &= \frac{2}{3(2x-1)} + \frac{7}{6(x+1)} - \frac{1}{2(x-1)}. \end{aligned}$$

- *Ejercicio 3:*

$$f(x) = \frac{x^3}{5x^4 - 5}$$

Descomponiendo el denominador en factores se obtiene la expresión

$$f(x) = \frac{x^3}{5(x^2+1)(x-1)(x+1)}.$$

Luego

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{5}\left[\frac{x^3}{(x^2+1)(x-1)(x+1)}\right] \\ &= \frac{1}{5}\left[\frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+1}\right] \\ \frac{x^3}{(x^2+1)(x-1)(x+1)} &= \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+1}. \end{aligned}$$

Se resuelve la suma de fracciones y se simplifican los denominadores

$$\begin{aligned} &\frac{x^3}{(x^2+1)(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{(Ax+B)(x^2-1) + C(x^2+1)(x+1) + D(x^2+1)(x-1)}{(x^2+1)(x-1)(x+1)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^3 &= Ax^3 - Ax + Bx^2 - B + Cx^3 + Cx^2 + Cx + C + Dx^3 \\ &\quad - Dx^2 + Dx - D \\ &= (A+C+D)x^3 + (B+C-D)x^2 + (-A+C+D)x \\ &\quad + (-B+C-D). \end{aligned}$$

Sistema de ecuaciones

$$A + C + D = 1, \tag{14}$$

$$B + C - D = 0, \tag{15}$$

$$-A + C + D = 0, \tag{16}$$

$$-B + C - D = 0. \tag{17}$$

Sumamos (14) y (16)

$$A + C + D = 1$$

$$\begin{aligned} -A + C + D &= 0 \\ 2C + 2D &= 1. \end{aligned} \tag{18}$$

Sumamos (15) y (17)

$$\begin{aligned} B + C - D &= 0 \\ -B + C - D &= 0 \\ 2C - 2D &= 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Sumamos (18) y (19)

$$\begin{aligned} 2C + 2D &= 1 \\ 2C - 2D &= 0 \\ C &= \frac{1}{4}. \end{aligned} \tag{20}$$

Sustituimos el valor de C en (20)

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} - D &= 0 \\ D &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Sustituimos C y D en (14) y (15)

$$\begin{aligned} A + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} &= 1 \\ A &= \frac{1}{2} \\ B + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} &= 0 \\ B &= 0. \end{aligned}$$

Sustituimos $A,\ B,\ C$ y D en la expresión

$$f(x) = \frac{1}{5}\left[\frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{C}{x - 1} + \frac{D}{x + 1}\right]$$

$$= \frac{1}{5}\left[\frac{\frac{1}{2}x+0}{x^2+1} + \frac{\frac{1}{4}}{x-1} + \frac{\frac{1}{4}}{x+1}\right]$$
$$= \frac{x}{10(x^2+1)} + \frac{1}{20(x-1)} + \frac{1}{20(x+1)}.$$

- *Ejercicio 4:*

$$f(x) = \frac{4}{x^3+4x}$$

Descomponiendo el denominador en factores se obtiene la expresión

$$f(x) = \frac{4}{x(x^2+4)}.$$

Luego

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{4}{x(x^2+4)} \\ &= \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4}. \end{aligned}$$

Se resuelve la suma de fracciones y se simplifican los denominadores

$$\begin{aligned} \frac{4}{x(x^2+4)} &= \frac{A(x^2+4)+(Bx+C)x}{x(x^2+4)} \\ 4 &= (A+B)x^2 + Cx + 4A. \end{aligned}$$

Sistema de ecuaciones

$$A + B = 0, \tag{21}$$
$$C = 0, \tag{22}$$
$$4A = 4. \tag{23}$$

Luego

$$A = 1,\ B = -1,\ C = 0.$$

Sustituimos A, B y C en la expresión

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x} + \frac{-x+0}{x^2+4} \\ &= \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+4}. \end{aligned}$$

- *Ejercicio 5:*

$$f(x) = \frac{3x^2+x-1}{x^2-5x+6}$$

Aplicando el Algoritmo de Euclides (prueba de la división) convertimos la fracción dada en mixta. Además, descomponemos el denominador en factores

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3x^2+x-1}{x^2-5x+6} \\ &= 3 + \frac{16x-19}{x^2-5x+6} \\ &= 3 + \frac{16x-19}{(x-3)(x-2)}. \end{aligned}$$

Luego

$$\frac{16x-19}{(x-3)(x-2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2}.$$

Se resuelve la suma de fracciones y se simplifican los denominadores

$$\begin{aligned} \frac{16x-19}{(x-3)(x-2)} &= \frac{A(x-2)}{x-3} + \frac{B(x-3)}{x-2} \\ 16x-19 &= (A+B)x - (2A+3B). \end{aligned}$$

Sistema de ecuaciones

$$A + B = 16, \tag{24}$$

$$2A + 3B = 19. \tag{25}$$

Resolviendo el sistema se obtiene

$$\begin{aligned} A &= 29 \\ B &= -13. \end{aligned}$$

Reemplazamos A y B en la expresión

$$\begin{aligned} f(x) &= 3 + \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2} \\ &= 3 + \frac{29}{x-3} + \frac{-13}{x-2} \\ &= 3 + \frac{29}{x-3} - \frac{13}{x-2}. \end{aligned}$$

• *Ejercicio 6:*

Transformar a fracciones parciales

$$\frac{5x-11}{2x^2-x-6}.$$

Se toma el denominador y se factora

$$2x^2 - x - 6 = (x-2)(2x+3).$$

Se colocan las constantes a determinar sobre el denominador y se realiza la igualación de las dos expresiones

$$\frac{5x-11}{2x^2-x-6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{2x+3}.$$

Se resuelve la suma de fracciones determinando mínimo y máximo común múltiplo

$$\frac{5x-11}{2x^2-x-6} = \frac{A(2x+3) + B(x-2)}{(2x+3)(x-2)}.$$

Se simplifican los denominadores y se forma la ecuación

$$5x - 11 = A(2x + 3) + B(x - 2).$$

Se resuelven las multiplicaciones y se agrupan los términos

$$\begin{aligned} 5x - 11 &= 2Ax + 3A + Bx - 2B \\ 5x - 11 &= 2Ax + Bx + 3A - 2B \\ 5x - 11 &= (2A + B)x + (3A - 2B). \end{aligned}$$

Se comparan las expresiones y formamos un sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{lll} \text{Ecuación 1:} & x^1 \to & 5 = 2A + B, \\ \text{Ecuación 2:} & x^0 \to & -11 = 3A - 2B. \end{array}$$

$$\begin{aligned} 2A + B &= 5 \\ 3A - 2B &= -11. \end{aligned}$$

Resolvemos el sistema por el método de suma y resta; para ello multiplicamos a la primera ecuación por 2.

$$\begin{aligned} 4A + 2B &= 10 \\ 3A - 2B &= -11 \\ 7A + 0 &= -1. \end{aligned}$$

De donde determinamos que $A = -\frac{1}{7}$. Luego reemplazamos el valor hallado en cualquiera de las dos ecuaciones iniciales y determinamos que $B = \frac{37}{7}$. Así, la fracción dada como fracciones parciales es

$$\frac{5x - 11}{2x^2 - x - 6} = \frac{-\frac{1}{7}}{x - 2} + \frac{\frac{37}{7}}{2x + 3}.$$

Es decir

$$\frac{5x - 11}{2x^2 - x - 6} = -\frac{1}{7(x - 2)} + \frac{37}{7(2x + 3)}.$$

- *Ejercicio 7:*

Transformar a fracciones parciales

$$\frac{3x^3 - 8x^2 + 10}{x(x-1)^3}.$$

Se colocan las constantes a determinar sobre el denominador y se realiza la igualación de las dos expresiones

$$\frac{3x^3 - 8x^2 + 10}{x(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)^3}.$$

Se resuelve la suma de fracciones determinando el mínimo y el máximo común múltiplo

$$\frac{3x^3 - 8x^2 + 10}{x(x-1)^3} = \frac{A(x-1)^3 + Bx(x-1)^2 + Cx(x-1) + Dx}{x(x-1)^3}.$$

Se simplifican los denominadores y se forma la ecuación

$$3x^3 - 8x^2 + 10 = A(x-1)^3 + Bx(x-1)^2 + Cx(x-1) + Dx.$$

Se resuelven las multiplicaciones y se agrupan los términos

$$\begin{aligned}
3x^3 - 8x^2 + 10 &= A(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + Bx(x^2 - 2x + 1) \\
&\quad + Cx(x-1) + Dx \\
3x^3 - 8x^2 + 10 &= Ax^3 - 3Ax^2 + 3Ax - A + Bx^3 - 2Bx^2 + Bx \\
&\quad + Cx^2 - Cx + Dx \\
3x^3 - 8x^2 + 10 &= (A+B)x^3 - (3A + 2B - C)x^2 \\
&\quad + (3A + B - C + D)x - A.
\end{aligned}$$

Se comparan los términos del mismo grado de cada una de las partes y formamos un sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{lll}
\text{Ecuación 1:} & x^3 \rightarrow & 3 = A + B, \\
\text{Ecuación 2:} & x^2 \rightarrow & 8 = 3A + 2B - C, \\
\text{Ecuación 3:} & x^1 \rightarrow & 0 = 3A + B - C + D, \\
\text{Ecuación 4:} & x^0 \rightarrow & 10 = -A.
\end{array}$$

Al resolver el sistema de ecuaciones formado se determinan los valores de $A = -10$, $B = 13$, $C = -12$ y $D = 5$. Luego, la fracción dada como fracciones parciales es

$$\frac{3x^3 - 8x^2 + 10}{x(x-1)^3} = -\frac{10}{x} + \frac{13}{x-1} - \frac{12}{(x-1)^2} + \frac{5}{(x-1)^3}.$$

- *Ejercicio 8:*

Transformar a fracciones parciales

$$\frac{2x^3 - x^2 - x + 3}{x(x-1)(2x+3)}.$$

Se transforma la fracción dada en mixta, utilizando el Teorema de la División

$$1 - \frac{2x^2 - 2x - 3}{x(x-1)(2x+3)}.$$

Luego la fracción a transformar en fracciones parciales es

$$\frac{2x^2 - 2x - 3}{x(x-1)(2x+3)}.$$

Se colocan las constantes a determinar sobre el denominador y se realiza la igualación de las dos expresiones

$$\frac{2x^2 - 2x - 3}{x(x-1)(2x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{2x+3}.$$

Se resuelve la suma de fracciones determinando el mínimo y el máximo común múltiplo

$$\frac{2x^2 - 2x - 3}{x(x-1)(2x+3)} = \frac{A(x-1)(2x+3) + Bx(2x+3) + Cx(x-1)}{x(x-1)(2x+3)}.$$

Se simplifican los denominadores y se forma la ecuación

$$2x^2 - 2x - 3 = A(x-1)(2x+3) + Bx(2x+3) + Cx(x-1).$$

Se resuelven las multiplicaciones y se agrupan los términos

$$
\begin{aligned}
2x^2 - 2x - 3 &= A(x-1)(2x+3) + Bx(2x+3) + Cx(x-1)\\
2x^2 - 2x - 3 &= 2Ax^2 + Ax - 3A + 2Bx^2 + 3Bx + Cx^2 - Cx\\
2x^2 - 2x - 3 &= (2A+2B+C)x^2 + (A+3B-C)x - 3A.
\end{aligned}
$$

Se comparan los términos del mismo grado de cada una de las partes y formamos un sistema de ecuaciones

$$
\begin{array}{lll}
\text{Ecuación 1:} & x^2 \rightarrow & 2A+2B+C = 2,\\
\text{Ecuación 2:} & x^1 \rightarrow & A+3B-C = -2,\\
\text{Ecuación 3:} & x^0 \rightarrow & -3A = -3.
\end{array}
$$

Al resolver el sistema de ecuaciones formado se determinan los valores de $A = 1$, $B = -\frac{3}{5}$ y $C = \frac{6}{5}$. Luego, la fracción dada como fracciones parciales es

$$\frac{2x^2 - 2x - 3}{x(x-1)(2x+3)} = 1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{5(x-1)} - \frac{6}{5(2x+3)}.$$

- *Ejercicio 9:*

Transformar a fracciones parciales

$$\frac{3x^2 - 8x + 5}{(x+1)^4}.$$

Se colocan las constantes a determinar sobre el denominador y se realiza la igualación de las dos expresiones

$$\frac{3x^2 - 8x + 5}{(x+1)^4} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3} + \frac{D}{(x+1)^4}.$$

Se resuelve la suma de fracciones determinando el mínimo y el máximo común múltiplo

$$\frac{3x^2 - 8x + 5}{(x+1)^4} = \frac{A(x+1)^3 + B(x+1)^2 + C(x+1) + D}{(x+1)^4}.$$

Se simplifican los denominadores y se forma la ecuación

$$3x^2 - 8x + 5 = A(x+1)^3 + B(x+1)^2 + C(x+1) + D.$$

Se resuelven las potencias y multiplicaciones y se agrupan los términos

$$\begin{aligned}3x^2 - 8x + 5 &= Ax^3 + 3Ax^2 + 3Ax + A + Bx^2 + 2Bx + B\\ &\quad + Cx + C + D\\ 3x^2 - 8x + 5 &= Ax^3 + (3A+B)x^2 + (3A+2B+C)x\\ &\quad + (A+B+C+D).\end{aligned}$$

Se comparan los términos del mismo grado de cada una de las partes y formamos un sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{lll}\text{Ecuación 1:} & x^3 \rightarrow & A = 0,\\ \text{Ecuación 2:} & x^2 \rightarrow & 3A + B = 3,\\ \text{Ecuación 3:} & x^1 \rightarrow & 3A + 2B + C = -8,\\ \text{Ecuación 4:} & x^0 \rightarrow & A + B + C + D = 5.\end{array}$$

Al resolver el sistema de ecuaciones formado se determinan los valores de $A = 0$, $B = 3$, $C = -14$ y $D = 16$. Luego, la fracción dada como fracciones parciales es

$$\frac{3x^2 - 8x + 5}{(x+1)^4} = \frac{0}{(x+1)} + \frac{3}{(x+1)^2} - \frac{14}{(x+1)^3} + \frac{16}{(x+1)^4}.$$

Es decir

$$\frac{3x^2 - 8x + 5}{(x+1)^4} = \frac{3}{(x+1)^2} - \frac{14}{(x+1)^3} + \frac{16}{(x+1)^4}.$$

• *Ejercicio 10:*

Transformar a fracciones parciales

$$\frac{-4x^3 + 12x^2 - 8x + 5}{(x+1)(x+2)(3x^2 - x + 1)}.$$

Se colocan las constantes a determinar sobre el denominador y se realiza la igualación de las dos expresiones

$$\frac{-4x^3+12x^2-8x+5}{(x+1)(x+2)(3x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2} + \frac{Cx+D}{3x^2-x+1}.$$

Se resuelve la suma de fracciones determinando el mínimo y el máximo común múltiplo.

$$\frac{-4x^3+12x^2-8x+5}{(x+1)(x+2)(3x^2-x+1)} = \frac{\begin{array}{l}A(x+2)(3x^2-x+1)\\ +B(x+1)(3x^2-x+1)\\ +(Cx+D)(x+1)(x+2)\end{array}}{(x+1)(x+2)(3x^2-x+1)}.$$

Se simplifican los denominadores y se forma la ecuación

$$\begin{aligned}-4x^3+12x^2-8x+5 = {} & A(x+2)(3x^2-x+1)\\ & +B(x+1)(3x^2-x+1)\\ & +(Cx+D)(x+1)(x+2).\end{aligned}$$

Se resuelven las multiplicaciones y se agrupan los términos

$$\begin{aligned}-4x^3+12x^2-8x+5 = {} & (3A+3B+C)x^3\\ & +(5A+2B+3C+D)x^2\\ & -(A-2C-3D)x+(2A+B+2D).\end{aligned}$$

Se comparan los términos del mismo grado de cada una de las partes y formamos un sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{lll}\text{Ecuación 1:} & x^3 \rightarrow & 3A+3B+C=-4,\\ \text{Ecuación 2:} & x^2 \rightarrow & 5A+2B+3C+D=12,\\ \text{Ecuación 3:} & x^1 \rightarrow & A-2C-3D=8,\\ \text{Ecuación 4:} & x^0 \rightarrow & 2A+B+2D=5.\end{array}$$

Al resolver el sistema de ecuaciones formado se determinan los valores de $A=\frac{29}{5}$, $B=-\frac{101}{15}$, $C=-\frac{6}{5}$ y $D=\frac{1}{15}$. Luego, la fracción dada como fracciones parciales es

$$\frac{-4x^3+12x^2-8x+5}{(x+1)(x+2)(3x^2-x+1)} = \frac{29}{x+1} - \frac{101}{x+2} - \frac{18x-1}{3x^2-x+1}.$$

Ejercicios de aplicación

• *Ejemplo 1:*

$$\int \frac{x^2-4x-4}{x^3-2x^2+4x-8} dx$$

Para integrar la expresión la convertimos en fracciones parciales. Entonces descomponemos el denominador en factores y formamos una expresión equivalente.

$$\frac{x^2-4x-4}{x^3-2x^2+4x-8} = \frac{x^2-4x-4}{(x-2)(x^2+4)}.$$

Luego

$$\frac{x^2-4x-4}{(x-2)(x^2+4)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{Bx+C}{(x^2+4)}.$$

Se resuelve la suma de fracciones y se simplifican los denominadores

$$\begin{aligned} \frac{x^2-4x-4}{(x-2)(x^2+4)} &= \frac{A(x^2+4)+Bx+C(x-2)}{x-2} \\ x^2-4x-4 &= (A+B)x^2-(2B-C)x-(-4A+2C). \end{aligned}$$

Sistema de ecuaciones

$$A+B=1, \tag{26}$$

$$2B-C=4, \tag{27}$$

$$-4A+2C=4. \tag{28}$$

Resolviendo el sistema se obtiene

$$\begin{aligned} A &= -1 \\ B &= 2 \\ C &= 0. \end{aligned}$$

Reemplazamos los valores de A, B y C en la expresión

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2-4x-4}{x^3-2x^2+4x-8}dx &= \int \left(\frac{-1}{x-2} + \frac{2x}{x^2-4} \right) dx \\ &= -\int \frac{dx}{x-2} + 2\int \frac{x}{x^2+4}dx \\ &= -\ln|x-2| + 2\ln|x^2+4| + k. \end{aligned}$$

- *Ejemplo 2:*

$$\int \frac{x}{(x-1)(x+1)^2}dx$$

convertimos la expresión en fracciones parciales

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}.$$

Resolvemos la suma de fracciones, simplificamos los denominadores y formamos un sistema de ecuaciones, el cual resolvemos para encontrar los valores de A, B y C

$$A = \frac{1}{4};\ B = -\frac{1}{4};\ C = \frac{1}{2}.$$

Entonces la fracción a integrar es

$$\begin{aligned} &\int \frac{1}{4(x-1)}dx - \int \frac{1}{4(x+1)}dx + \int \frac{1}{2(x+1)^2} \\ &\quad = \frac{1}{4}\int \frac{1}{(x-1)}dx - \frac{1}{4}\int \frac{1}{(x+1)}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x+1)^2}dx \\ &\quad = \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln\frac{(x-1)}{(x+1)} + k. \end{aligned}$$

- *Ejemplo 3:*

$$\int \frac{dx}{x^3-2x^2+x}dx$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^3-2x^2+x} &= \frac{1}{x(x^2-2x+1)}\\ &= \frac{1}{x(x-1)^2}\\ &= \frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}.\end{aligned}$$

$$A = 1;\ B = -1;\ C = 1.$$

$$\begin{aligned}&\int \frac{1}{x}dx - \int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}dx\\ &\qquad = \ln|x| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + k.\end{aligned}$$

- *Ejemplo 4:*

$$\int \frac{x^2-4x-2}{x^3-2x^2+4x-8}dx$$

$$\begin{aligned}\frac{x^2-4x-2}{x^3-2x^2+4x-8} &= \frac{x^2-4x-2}{(x-2)(x^2+4)}\\ &= \frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+4}\\ &= \frac{A(x^2+4)+(Bx+C)(x-2)}{(x-2)(x^2+4)}.\end{aligned}$$

$$x^2-4x-2 = (A+B)x^2-(2B-C)x-(-4A+2C).$$

Sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} A + B &= 1, & (29)\\ 2B - C &= 4, & (30)\\ -4A + 2C &= 2. & (31) \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema

$$\begin{aligned} A &= -\frac{3}{4}\\ B &= \frac{7}{4}\\ C &= -12. \end{aligned}$$

$$\frac{-\frac{3}{4}}{x-2} + \frac{\frac{7}{4}x - \frac{1}{2}}{x^2+4}.$$

$$\begin{aligned} &\int \frac{-3}{4(x-2)}dx + \int \frac{7x-2}{4(x^2+4)}dx\\ &\qquad = -\frac{3}{4}\int \frac{1}{(x-2)}dx + \frac{1}{4}\int \frac{7x-2}{x^2+4}dx\\ &\qquad = -\frac{3}{4}\int \frac{1}{(x-2)}dx + \frac{7}{4}\int \frac{x}{x^2+4}dx - \frac{2}{4}\int \frac{1}{x^2+4}dx\\ &\qquad = -\frac{3}{4}\ln|x-2| + \frac{7}{4}7\ln|x^2+4| - \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + k. \end{aligned}$$

Ejercicios propuestos

a) $\dfrac{x+2}{x^3}$

b) $\dfrac{x^2+3x-4}{x^2-2x-8}$

c) $\dfrac{x^4-2x^3+3x^2-x+3}{x^3-2x^2+3x}$

d) $\dfrac{1}{x^3+x}$

e) $\dfrac{x-5}{(x^2-25)(x-2)(x+5)}$

f) $\dfrac{x^3}{x^3-64}$

g) $\dfrac{1}{(x+2)^3}$

h) $\dfrac{3x^2-16}{x^2-4x}$

i) $\dfrac{x^5-1}{x^4-1}$

j) $\dfrac{1-x^2}{(x+1)(x-3)^2(2x+1)}$

k) $\dfrac{x^2-1}{(x^{-2}+1)^2}$

l) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^3-1)}$

m) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^3-1)^2}$

n) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)}$

o) $\displaystyle\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}dx$

p) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)(x+3)}$

q) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$

r) $\displaystyle\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}dx$

s) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+1}$

t) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$

u) $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^4-1}dx$

v) $\displaystyle\int \frac{2x-3}{x^2-3x+2}dx$

w) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$

x) $\displaystyle\int \frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)}dx$

y) $\displaystyle\int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}dx$

- *Respuestas*

a) $\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{1}{x^2}$

b) $1+\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{4}{x-4}$

c) $x+\dfrac{1}{x}-\dfrac{4}{x-4}$

d) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{x^2+1}$

e) $-\dfrac{1}{7(x+5)^2}-\dfrac{1}{49(x+5)}+\dfrac{1}{49(x-2)}$

f) $1+\dfrac{4}{3(x-4)}-\dfrac{4}{3}\dfrac{x+8}{x^2+4x+16}$

g) $\dfrac{1}{(x+2)^3}$

h) $3+\dfrac{4}{x}+\dfrac{8}{x-4}$

i) $x+\dfrac{1}{2(x+1)}-\dfrac{1}{2}\dfrac{(x-1)}{(x^2+1)}$

j) $\dfrac{6}{49(2x+1)}-\dfrac{2}{7(x-3)^2}-\dfrac{3}{49(x-3)}$

k) $x^2-3+\dfrac{5}{1+x^2}-\dfrac{2}{(1+x^2)^2}$