CAPÍTULO DOS

Conceptos en probabilidad

2.1 Introducción

La probabilidad es un mecanismo por medio del cual pueden estudiarse sucesos aleatorios, cuando éstos se comparan con los fenómenos determinísticos. Por ejemplo, nadie espera predecir con certidumbre el resultado de un experimento tan simple como el lanzamiento de una moneda. Sin embargo, cualquier estudiante de primer año de licenciatura en física debe ser capaz de calcular el tiempo que transcurrirá para que un objeto, que se deja caer desde una altura conocida, llegue al suelo.

La probabilidad tiene un papel crucial en la aplicación de la inferencia estadística porque una decisión, cuyo fundamento se encuentra en la información contenida en una muestra aleatoria, puede estar equivocada. Sin una adecuada comprensión de las leyes básicas de la probabilidad, es difícil utilizar la metodología estadística de manera efectiva.

Para ilustrar el uso de la probabilidad en la toma de decisiones, considérese el siguiente ejemplo: una compañía produce un detergente líquido que se envasa en botellas de 500 ml, las que son llenadas por una máquina. Debido a que las botellas que contienen una cantidad mayor de 500 ml representan una pérdida para la compañía y todas aquellas que contienen una cantidad menor constituyen una pérdida para el consumidor (lo que puede desencadenar una acción legal en contra de la compañía), la compañía realiza todos los esfuerzos necesarios para mantener el volumen neto promedio en un nivel de 500 ml. Para mantener un control apropiado se ideó el siguiente esquema de muestreo: se seleccionarán 10 botellas del proceso de llenado, cuatro veces durante el transcurso del día y se determinará su contenido neto promedio. Si éste se encuentra entre 498 y 502 ml, inclusive, el proceso se considerará "bajo control"; de otra manera, éste se encontrará "fuera de control". En este caso se detendrá el llenado, llevando a cabo todos los esfuerzos necesarios para determinar la causa, si es que ésta existe, del problema. Con toda seguridad y para cualquiera de las dos situaciones se tienen riesgos. Si el proceso se considera bajo control, podría encontrarse fuera de éste, y la compañía puede estar perdiendo el producto o sujetándose a una acción legal por parte de las correspondientes oficinas del gobierno. Por otro lado si el proceso se considera fuera de control, puede en realidad encontrarse bajo control y la compañía estará intentando localizar una falla inexistente. La evaluación de estos riesgos sólo puede hacerse de manera efectiva a través del uso de la probabilidad.

En las tres secciones siguientes se examinarán las interpretaciones *clásica, de frecuencia relativa* y *subjetiva,* de la probabilidad. Las dos primeras son muy similares debido a que se basan en la repetición de experimentos realizados bajo las mismas condiciones, como el lanzamiento de una moneda. La interpretación subjetiva o personal de la probabilidad representa una medida del grado de creencia con respecto a una proposición, como podría ser si la creación de una nueva empresa tendrá éxito. En la sección 2.5 se establecen algunos axiomas y, con base en éstos, se define formalmente la probabilidad. El desarrollo axiomático incluye las tres interpretaciones de la probabilidad.

2.2 La definición clásica de probabilidad

El desarrollo inicial de la probabilidad se asocia con los juegos de azar. Por ejemplo, considérense dos dados que se distingan y que no están cargados; el interés recae en los números que aparecen cuando se tiran los dados. En la tabla 2.2 se dan los 36 posibles pares de números.

Una característica clave de este ejemplo, así como también de muchos otros relacionados con los juegos de azar, es que los 36 resultados son *mutuamente excluyentes* debido a que no puede aparecer más de un par en forma simultánea. Los 36 resultados son *igualmente probables* puesto que sus frecuencias son prácticamente las mismas, si se supone que los dados no están cargados y que el experimento se lleva a cabo un número suficientemente grande de veces. Nótese que de los 36 resultados posibles, seis dan una suma de siete, cinco dan una suma de ocho, etc. Por lo tanto, puede pensarse de manera intuitiva que la probabilidad de obtener un par de números cuya suma sea siete es la proporción de resultados que suman siete con respecto al número total, en este caso 6/36. Es importante que el lector comprenda que la proporción 6/36 se obtiene únicamente después de que el experimento se realiza un número grande de veces, es decir, después de efectuar el experimento muchas veces se observará que, alrededor de la sexta parte de éste, la suma de los números que aparecen es igual a siete. La proporción 6/36 no significa que en seis tiradas, forzosamente una dará como resultado un siete. Para situaciones de este tipo es apropiada la siguiente definición de probabilidad.

Definición 2.1 Si un experimento que está sujeto al azar, resulta de n formas igualmente probables y mutuamente excluyentes, y si n_A de estos resultados tienen un atributo A, la probabilidad de A es la proporción de n_A con respecto a n.

TABLA 2.1 Posibles resultados que aparecen cuando se lanzan dos dados

1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

2.3 Definición de probabilidad como frecuencia relativa

En muchas situaciones prácticas, los posibles resultados de un experimento no son igualmente probables. Por ejemplo, en una fábrica las oportunidades de observar un artículo defectuoso normalmente será mucho más rara que observar un artículo bueno. En este caso, no es correcto estimar la probabilidad de encontrar un artículo defectuoso mediante el empleo de la definición clásica. En lugar de ésta, en muchas ocasiones se emplea la interpretación de la probabilidad como una frecuencia relativa.

La interpretación de una frecuencia relativa descansa en la idea de que un experimento se efectúa y se repite muchas veces, y prácticamente bajo las mismas condiciones. Cada vez que un experimento se lleva a cabo, se observa un resultado. Éste es impredecible dada la naturaleza aleatoria del experimento, la probabilidad de la presencia de cierto atributo se aproxima por la frecuencia relativa de los resultados que posee dicho atributo. Conforme aumenta la repetición del experimento, la frecuencia relativa de los resultados favorables se aproxima al verdadero valor de la probabilidad para ese atributo. Por ejemplo: supóngase que se desea determinar la proporción de artículos defectuosos en un proceso de fabricación. Para llevar a cabo lo anterior, se muestra un determinado número de artículos; cada observación constituye un experimento. Los resultados pueden clasificarse como defectuosos o no defectuosos. Si el proceso de fabricación es estable, y asegura así las condiciones uniformes, al aumentar el número de artículos muestreados, la frecuencia relativa de artículos defectuosos con respecto al número de unidades muestreadas se aproximará cada vez más a la verdadera proporción de artículos defectuosos.

Para ilustrar la interpretación de la probabilidad como frecuencia relativa se simuló en una computadora un proceso de muestreo de n unidades, suponiendo que el proceso de fabricación producía un 5% de artículos defectuosos. Para cada n se observó el número de unidades defectuosas; los resultados se dan en la tabla 2.2 para valores de n entre 20 y 10 000. A partir de esto es razonable concluir que la frecuencia relativa tiende a un valor verdadero de 0.05 conforme n crece. De esta manera, se sugiere la siguiente definición de la probabilidad como frecuencia relativa:

TABLA 2.2. Resultados de un experimento simulado en computadora

Número de unidades muestreadas (n)	*Número de unidades defectuosas observadas*	*Frecuencia relativa*
20	2	0.10
50	3	0.06
100	4	0.04
200	12	0.06
500	28	0.056
1 000	54	0.054
2 000	97	0.0485
5 000	244	0.0488
10 000	504	0.0504

Definición 2.2 Si un experimento se repite n veces bajo las mismas condiciones y n_B de los resultados son favorables a un atributo B, el límite de n_B/n conforme n se vuelve grande, se define como la probabilidad del atributo B.

2.4 Interpretación subjetiva de la probabilidad

La repetición de un experimento bajo las mismas condiciones es la base para las interpretaciones clásica y de frecuencia relativa de la probabilidad. Sin embargo, muchos fenómenos no se prestan para repetición, pero a pesar de esto requieren de una noción de probabilidad. Por ejemplo la compañía que aseguró los Juegos Olímpicos de 1980 tuvo que determinar, *a priori,* los riesgos de que los juegos no se efectuasen de la manera en que se habían planeado. O cuando se aseguran contra robo o daño esculturas y pinturas cuyo valor es muy alto, las compañías aseguradoras deben tener idea de los riesgos adquiridos para fijar de manera adecuada, el precio del seguro. En ninguno de estos ejemplos puede concebirse un experimento susceptible de llevarse a cabo bajo condiciones similares. Por otra parte, muchas de las afirmaciones que suelen formularse las personas de algún modo implican probabilidad. Por ejemplo, cuando se dice "probablemente el embarque llegará mañana", o cuando un corredor de bolsa asesora a un cliente sobre la posible alza de una acción, se está sugiriendo alguna idea de la probabilidad de ocurrencia de las afirmaciones anteriores.

Para los ejemplos anteriores, la interpretación de la probabilidad no puede tener su fundamento en la frecuencia de ocurrencia. La probabilidad se interpreta como el grado de creencia o de convicción con respecto a la ocurrencia de una afirmación. En este contexto, la probabilidad representa un juicio personal acerca de un fenómeno impredecible. Esta interpretación de la probabilidad se conoce como *subjetiva* o *personal.*

Es importante hacer hincapié en que la probabilidad subjetiva también puede aplicarse a experimentos repetitivos. Por ejemplo, un jugador de blackjack puede, en un momento dado, decidir tomar otra carta y hacer caso omiso de su experiencia previa, debido a que cree que esto aumentará sus oportunidades de ganar la mano. El capitán de un equipo de futbol puede pedir "cara" cuando la moneda se lance al aire, debido a que ésa es su creencia con respecto al resultado de arrojarla. Con base en tales aplicaciones, la probabilidad subjetiva es considerada por muchos como más general que las otras dos interpretaciones.

Para ilustrar la traslación de un grado de creencia en probabilidad, considere la siguiente situación: se pregunta a dos ingenieros petroleros, A y B, su opinión acerca de la posibilidad de descubrir petróleo en un determinado sitio. La respuesta de A es que él está seguro, en un 80%, de que se encontrará petróleo mientras que B lo está en un 70%.* El porcentaje dado por los ingenieros es una medida de la creencia de éstos, con respecto al descubrimiento de petróleo. De esta manera se pueden asignar distintas medidas de creencia a la misma proposición. Pero ¿qué significado tienen realmente el 80% y 7%? La interpretación común es la siguiente. El ingeniero A pien-

70

* Por implicación, A y B también están diciendo que se encuentran seguros, en un 20% y 30%, respectivamente, de que no será descubierto el petróleo.

sa apostar ocho a dos (por ejemplo $8 contra $2 o cualquier otra cantidad de dólares que se encuentre en la misma proporción) a que el petróleo será descubierto en ese sitio. De manera similar, B cree que es mejor apostar siete a tres (es decir $7 contra $3) para el mismo resultado. De esta manera, las probabilidades subjetivas de A y B se definen como las proporciones $8/(8 + 2)$ y $7/(7 + 3)$ respectivamente. En general si las apuestas en favor de una afirmación son de c a d, la probabilidad de ésta es $c/(c + d)$.

2.5 Desarrollo axiomático de la probabilidad

Para formalizar la definición de probabilidad, a través de un conjunto de axiomas, se repasarán brevemente los conceptos básicos de la teoría de conjuntos (o eventos), sobre los cuales se fundamenta la definición formal de probabilidad. Esta definición es tan general que permite incorporar las distintas interpretaciones de la probabilidad, mencionadas anteriormente.

La colección de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio es importante en la definición de la probabilidad. Para definir esta colección considérense los siguientes experimentos: el número de reservaciones no canceladas para un vuelo, el número de llegadas a un servicio o la duración de un determinado componente. Todos son ejemplos de fenómenos impredecibles con un determinado número de posibles resultados. El número de reservaciones no canceladas puede ser cualquier entero positivo no mayor que el número de asientos del avión; el número de llegadas puede ser, teóricamente, cualquier entero positivo sin ningún límite, y la duración de un componente puede ser cualquier número real positivo. Lo anterior lleva, de manera inmediata, a la siguiente definición:

Definición 2.3 El conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio recibe el nombre de *espacio muestral.*

El conjunto de todos los posibles resultados puede ser finito, infinito numerable o infinito no numerable. Por ejemplo, el número de reservaciones sin cancelar constituye un espacio muestral finito, dado que este número nunca excederá la capacidad del avión, que es finita. El número de llegadas al servicio constituye un espacio muestral infinito numerable, dado que es posible colocar los resultados en una correspondencia uno a uno con los enteros positivos, que constituyen un conjunto infinito pero numerable. La duración de una componente constituye un espacio muestral infinito innumerable, dado que ésta puede ser cualquier número real positivo. En este momento, es conveniente dar las siguientes definiciones.

Definición 2.4 Se dice que un espacio muestral es *discreto* si su resultado puede ponerse en una correspondencia uno a uno con el conjunto de los enteros positivos.

Definición 2.5 Se dice que un espacio muestral es *continuo* si sus resultados consisten de un intervalo de números reales.

Con respecto a los resultados de un espacio muestral, se puede estar particularmente interesado en un subconjunto de éstos. Por ejemplo, un gerente de cierta línea aérea desea saber si el número de reservaciones sin cancelar es menor que cinco, o bien un comprador de baterías desea saber si éstas tendrán una operación normal mayor de 40 horas. De esta manera, se tiene la siguiente definición:

Definición 2.6 Un *evento* del espacio muestral es un grupo de resultados contenidos en éste, cuyos miembros tienen una característica común.

Por característica común debe entenderse que únicamente un grupo de resultados en particular satisface la característica y los restantes, contenidos en el espacio muestral, no. Se dice que ha ocurrido un evento si los resultados del experimento aleatorio incluyen a algunos de los que definen al evento. En este contexto, el espacio muestral, evento en sí mismo, puede entenderse como un *evento seguro*, puesto que se tiene un 100% de certidumbre de que ocurrirá un resultado del espacio muestral cuando el experimento se lleve a cabo. Para completar se dan las siguientes definiciones:

Definición 2.7 El evento que contiene a ningún resultado del espacio muestral recibe el nombre de *evento nulo* o *vacío*.

Deberán recordarse algunas definiciones de la teoría de eventos. Sean E_1 y E_2 cualesquiera dos eventos que se encuentren en un espacio muestral dado denotado por S.

Definición 2.8 El evento formado por todos los posibles resultados en E_1 o E_2 o en ambos, recibe el nombre de la *unión* de E_1 y E_2 y se denota por $E_1 \cup E_2$.

Definición 2.9 El evento formado por todos los resultados comunes tanto a E_1 como a E_2 recibe el nombre de *intersección de* E_1 y E_2 y se denota por $E_1 \cap E_2$.

Definición 2.10 Se dice que los eventos E_1 y E_2 son *mutuamente excluyentes* o *disjuntos* si no tienen resultados en común; en otras palabras $E_1 \cap E_2 = \emptyset \equiv$ evento vacío.

Definición 2.11 Si cualquier resultado de E_2 también es un resultado de E_1, se dice que el evento E_2 está *contenido* en E_1, y se denota por $E_2 \subset E_1$.

Definición 2.12 El *complemento* de un evento E con respecto al espacio muestral S, es aquel que contiene a todos los resultados de S que no se encuentran en E, y se denota por $\overline{E}$.

Las definiciones anteriores pueden demostrarse de manera gráfica mediante el uso de los diagramas de Venn, como se muestra en la figura 2.1.

Como ejemplo, considérese el experimento de lanzar un dado; el espacio muestral es S (1, 2, 3, 4, 5, 6). Se definen los eventos $E_1 = (2, 4, 6)$, $E_2 = (1, 3)$, y $E_3 = (2, 4)$. Es fácil verificar que $E_1 \cup E_2 = (1, 2, 3, 4, 6)$, $E_1 \cap E_3 = (2, 4)$, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, E_3 se encuentra completamente contenido en E_1 y $\overline{E}_2 = (2, 4, 5, 6)$.

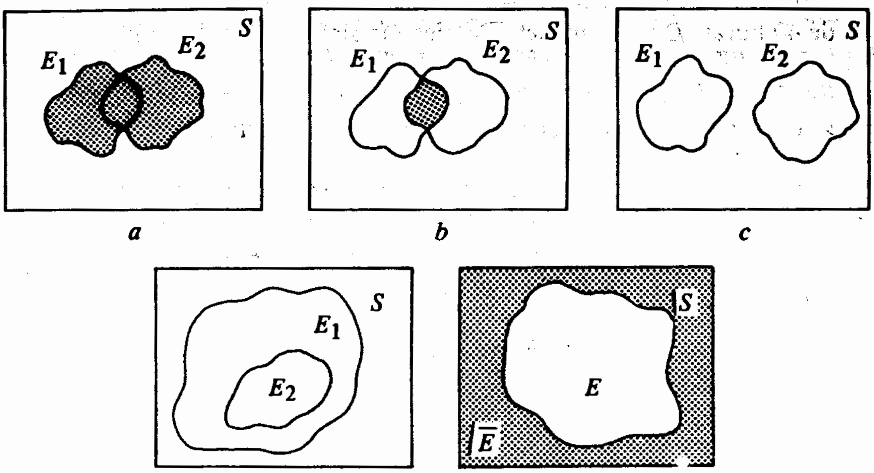

FIGURA 2.1 Diagramas de Venn que ilustran *a)* la unión de dos eventos; *b)* la intersección de dos eventos; *c)* eventos mutuamente excluyentes; *d)* un evento contenido en otro, y *e)* un evento y su complemento

La probabilidad es un número real que mide la posibilidad de que ocurra un resultado del espacio muestral, cuando el experimento se lleve a cabo. Por lo tanto, la probabilidad de un evento también es un número real que mide la posibilidad colectiva, de ocurrencia, de los resultados del evento cuando se lleve a efecto el experimento. A continuación se da la definición axiomática de la probabilidad.

Definición 2.13 Sean S cualquier espacio muestral y E cualquier evento de éste. Se llamará *función de probabilidad* sobre el espacio muestral S a $P(E)$ si satisface los siguientes axiomas:

1. $P(E) \geqslant 0$
2. $P(S) = 1$
3. Si, para los eventos $E_1, E_2, E_3, \ldots,$

   $E_i \cap E_j = \emptyset$ para toda $i \neq j$, entonces

   $P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots) = P(E_1) + P(E_2) + \cdots.$

La razón de estos tres axiomas se convierte en aparente cuando, por ejemplo, se recuerda la interpretación de la probabilidad como una frecuencia relativa. Es decir, la probabilidad de un evento refleja la proporción de veces en que ocurrirá cuando el experimento se repita. Los axiomas también son evidentes para la interpretación subjetiva de la probabilidad, dado que para ésta cualquier grado de creencia se convierte en una proporción. De ahí que las probabilidades exhiban las características de las proporciones, en las que la probabilidad es un número entre cero y uno, y dado que es forzoso que ocurra un resultado cuando se lleva a efecto un experimento, la probabilidad de S es uno. Además si no hay ningún resultado en común entre dos eventos E_1 y E_2, la probabilidad de que ocurra E_1 o E_2 es igual a la proporción de veces en que ocurre E_1 más la proporción de veces en que ocurra E_2.

En seguida se demostrarán algunas de las consecuencias de estos tres axiomas.

Teorema 2.1 $P(\emptyset) = 0$.

Demostración:

$$S \cup \emptyset = S \quad \text{y} \quad S \cap \emptyset = \emptyset.$$

Por el axioma 3,

$$P(S \cup \emptyset) = P(S) + P(\emptyset);$$

pero por el axioma 2, $P(S) = 1$, y de esta manera $P(\emptyset) = 0$.

Teorema 2.2 Para cualquier evento $E \subset S$, $0 \leqslant P(E) \leqslant 1$.

Demostración: Por el axioma 1, $P(E) \geqslant 0$; de aquí que sólo es necesario probar que $P(E) \leqslant 1$.

$$E \cup \bar{E} = S \quad \text{y} \quad E \cap \bar{E} = \emptyset.$$

Por los axiomas 2 y 3,

$$P(E \cup \bar{E}) = P(E) + P(\bar{E}) = P(S) = 1;$$

dado que $P(\bar{E}) \geqslant 0$, $P(E) \leqslant 1$.

El axioma 3 da la probabilidad de la unión de dos eventos disjuntos. Por otro esta porción de la suma de P(A) y P(B). El teorema se reduce al axioma 3 cuando la probabilidad de la unión de dos eventos que no son, necesariamente, disjuntos? Para dar respuesta a las preguntas anteriores se enuncia el siguiente resultado general, el que usualmente recibe el nombre de regla de adición de probabilidades.

Teorema 2.3 Sea S un espacio muestral que contiene a cualesquiera dos eventos A y B; entonces,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Aun cuando no se pretende dar aquí una demostración formal del teorema, éste es intuitivamente razonable. $P(A)$ y $P(B)$ reflejan el número de veces en que ocurrirán los resultados de A y B, respectivamente. Sin embargo, y teniendo en cuenta lo anterior, los resultados comunes serán contados dos veces con la necesidad de restar esta porción de la suma de $P(A)$ y $P(B)$. El teorema se reduce al axioma 3 cuando los eventos son disjuntos.

Ejemplo 2.1 Un sistema contiene dos componentes A y B, y se conecta de manera que éste funciona si cualesquiera de las componentes funciona. Se sabe que la probabilidad de que A funcione es $P(A) = 0.9$ y la de B es $P(B) = 0.8$ y la probabilidad de ambos es $P(A \cap B) = 0.72$. Determinar la probabilidad de que el sistema funcione.

La probabilidad de que el sistema trabaje es igual a la probabilidad de la unión entre A y B; de esta manera,

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= 0.9 + 0.8 - 0.72 = 0.98. \end{aligned}$$

2.6 Probabilidades conjunta, marginal y condicional

En esta sección se examinan los conceptos de probabilidad conjunta, marginal y condicional, y se desarrolla la ley de multiplicación de probabilidades. Considérese un experimento en el que se elige aleatoriamente una persona adulta que viva en una ciudad con n personas adultas, y se anotan sus características con respecto a su hábitos de fumador y su sexo. Sea el espacio muestral la población de adultos de la ciudad, que se divide en los siguientes eventos disjuntos: fumador A_1 y no fumador A_2, hombre B_1 y mujer B_2. Los eventos en S pueden representarse como se muestra en la tabla 2.3.

Como ejemplo, nótese que n_{11} de los n adultos son hombres que fuman, por lo que son poseedores de los atributos A_1 y B_1. Supóngase que se desea determinar la probabilidad de ocurrencia simultánea de los eventos A_1 y B_2. Mediante el empleo de la interpretación de frecuencia relativa, puede argumentarse que, dado que exactamente n_{12} de los n adultos poseen ambos atributos, A_1 y B_2, la probabilidad es n_{12}/n. Esta última recibe el nombre de *probabilidad conjunta* puesto que se insiste en la probabilidad de resultados comunes a ambos eventos A_1 y B_2. Por lo tanto la probabilidad de los eventos A_i y B_j está dada por

$$P(A_i \cap B_j) = n_{ij}/n.$$

TABLA 2.3 Clasificación de n adultos mediante su sexo y hábitos de fumadores

	B_1	B_2
A_1	n_{11}	n_{12}
A_2	n_{21}	n_{22}

Supóngase que ahora el interés recae en determinar la probabilidad A_i, sin considerar cualquier otro evento B_j del espacio muestral S. Para especificar, supóngase que se necesita la probabilidad del evento A_2. Haciendo uso de nuevo de la interpretación de frecuencia relativa, el número total de personas no fumadoras (A_2) es $n_{21} + n_{22}$; de esta manera se tiene

$$P(A_2) = (n_{21} + n_{22})/n.$$

Este tipo de probabilidad se conoce como *marginal* porque para determinarla se ignoran una o más características del espacio muestral. De lo anterior se sigue que

$$P(A_i) = \sum_{j=1}^{2} n_{ij}/n,$$

pero dado que

$$P(A_i \cap B_j) = n_{ij}/n,$$

$$\mathrm{P}(A_i) = \sum_{j=1}^{2} P(A_i \cap B_j).$$

En otras palabras, la probabilidad marginal de un evento A_i es igual a la suma de las probabilidades conjuntas de A_i y B_j, donde la suma se efectúa sobre todos los eventos B_j. De manera similar la probabilidad marginal de B_j está dada por

$$P(B_j) = \sum_{i=1}^{2} P(A_i \cap B_j).$$

En este punto ya debe ser obvia la extensión para incluir más de dos eventos disjuntos.

Finalmente, supóngase que el interés recae en determinar la probabilidad de un evento A_i, dado que ha ocurrido el evento B_j. Por ejemplo, regresando a la tabla 2.3, supóngase que se ha elegido aleatoriamente una mujer adulta. (B_2) Ahora bien, ¿cuál es la probabilidad de que fume? Una vez más, el argumento descansa sobre la interpretación de frecuencia relativa. Sin embargo, una vez que el evento "mujer" ha ocurrido, éste reemplaza a S como el espacio muestral de interés. Por lo tanto, la probabilidad de tener un fumador (A_1) es el número de mujeres que fuman (n_{12}) entre el número total de estas ($n_{12} + n_{22}$). Por lo tanto

$$P(A_1|B_2) = n_{12}/(n_{12} + n_{22}),$$

donde la barra vertical se lee como "dado que" y separa al evento A_1, cuya probabilidad está condicionada a la previa ocurrencia del evento B_2. Ésta recibe el nombre de *probabilidad condicional* de A_1 dada la ocurrencia de B_2. En general, se tiene que

$$P(A_i|B_j) = n_{ij}/\sum_{i=1}^{2} n_{ij}, \tag{2.1}$$

y por simetría,

$$P(B_j|A_i) = n_{ij}/\sum_{j=1}^{2} n_{ij}. \tag{2.2}$$

Al dividir el numerador y denominador del miembro derecho de (2.1) por n, se tiene

$$P(A_i|B_j) = \frac{n_{ij}/n}{\sum_{i=1}^{2} n_{ij}/n},$$

pero

$$P(A_i \cap B_j) = n_{ij}/n$$

y

$$P(B_j) = \sum_{i=1}^{2} n_{ij}/n;$$

por lo tanto

$$P(A_i|B_j) = \frac{P(A_i \cap B_j)}{P(B_j)}, \quad P(B_j) > 0, \tag{2.3}$$

y de manera equivalente

$$P(B_j|A_i) = \frac{P(A_i \cap B_j)}{P(A_i)}, \quad P(A_i) > 0. \tag{2.4}$$

Para definir las probabilidades conjunta, marginal y condicional se ha empleado un ejemplo específico en el que el espacio muestral contiene únicamente un número finito de resultados. Sin embargo, las definiciones dadas aquí son completamente generales y pueden extenderse para incluir cualquier espacio muestral ya sea discreto o continuo. Con base en lo anterior se define de la siguiente manera.

Definición 2.14 Sean A y B cualesquiera dos eventos que se encuentran en un espacio muestral S de manera tal que $P(B) > 0$. La probabilidad condicional de A al ocurrir el evento B, es el cociente de la probabilidad conjunto de A y B con respecto a la probabilidad marginal de B; de esta manera se tiene

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0. \tag{2.5}$$

La relación entre (2.5) puede escribirse como un producto, lo que da como resultado la regla de multiplicación de probabilidades, dada por

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B). \tag{2.6}$$

Por simetría, la probabilidad condicional de B dada la ocurrencia de A, es

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \quad P(A) > 0.$$

De esta manera se tiene

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

que es otra versión de la regla de multiplicación, la que implica que

$$P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B). \tag{2.7}$$

La definición 2.14 puede extenderse para incluir cualquier número de eventos que se encuentren en el espacio muestral. Por ejemplo, puede demostrarse que para tres eventos A, B y C

$$P(A|B \cap C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)}, \quad P(B \cap C) > 0 \tag{2.8}$$

y

$$P(A \cap B|C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)}, \quad P(C) > 0. \tag{2.9}$$

Los siguientes ejemplos ilustrarán los conceptos presentados en esta sección.

Ejemplo 2.2 A los habitantes de una gran ciudad se les hizo una encuesta con el propósito de determinar el número de lectores de *Time* y *Newsweek*. Los resultados de la encuesta fueron los siguientes: 20% de los habitantes leen el *Time*, el 16% lee el *Newsweek* y un 1% lee ambos semanarios. Si se selecciona al azar a un lector de *Time*, ¿cuál es la probabilidad de que también lea el *Newsweek?*

Sean A y B los eventos que representan el número de lectores del *Time* y *Newsweek* respectivamente; dado que $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.16$ y $P(A \cap B) = 0.01$,

$$P(\mathrm{B}|\mathrm{A}) = 0.01/0.2 = 0.05.$$

Por otra parte, también puede determinarse la probabilidad de que un lector del *Newsweek* lea también el *Time*; esto es

$$P(A|B) = 0.01/0.16 = 0.0625,$$

y se verifica la relación $P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$, o (0.2)(0.05) (0.16)(0.0625).

Ejemplo 2.3 Muchas instituciones bancarias emplean modelos computarizados de crédito con el propósito de dar un determinado puntaje a todas las solicitudes de préstamo. Este puntaje se emplea como una ayuda para decidir cuándo se otorga el préstamo. Supóngase que el 3% de todos los préstamos que se otorgan presentan problemas por incumplimiento de pago y que los modelos de crédito son precisos en un 80% al predecir menos créditos. Si el 85% de todas las solicitudes reciben puntuaciones favorables por los modelos computarizados y se les otorga el préstamo, determinar la probabilidad de que una solicitud que recibe una puntuación favorable y a la que se le otorga el préstamo, no presente ningún problema para el pago de éste.

Sea A el evento incumplimiento de pago y B la puntuación favorable. Del enunciado del problema se tiene que $P(A) = 0.03$, $P(B) = 0.85$ y $P(B|\overline{A}) = 0.8$, en donde $\overline{A}$ es el complemento de A, es decir, el evento cumplimiento de pago. Lo que se busca es la probabilidad condicional de que no exista ningún problema en el pago del préstamo, dado que la solicitud obtuvo una puntuación favorable, o $P(\overline{A}|B)$. Usando la relación (2.7), se tiene

$$P(B)P(\overline{A}|B) = P(\overline{A})P(B|\overline{A}),$$

o

$$P(\overline{A}|B) = \frac{P(\overline{A})P(B|\overline{A})}{P(B)},$$

y dado que $P(\overline{A}) = 0.97$, la probabilidad deseada es $P(\overline{A}|B) = 0.9129$.

Ejemplo 2.4 Una planta recibe reguladores de voltaje de dos diferentes proveedores, B_1 y B_2; el 75% de los reguladores se compra a B_1 y el resto a B_2. El porcentaje de reguladores defectuosos que se reciben de B_1 es 8% y el de B_2 es 10%. Determinar la probabilidad de que funcione un regulador de voltaje de acuerdo con las especificaciones (es decir, el regulador no está defectuoso).

Sea A el evento el regulador de voltaje es no defectuoso. Es claro que ningún regulador de voltaje puede ser vendido tanto por B_1 como por B_2; por lo tanto B_1 y B_2 son disjuntos. Esto da como resultado

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2),$$

pero

$$P(A \cap B_1) = P(B_1)P(A|B_1)$$

y

$$P(A \cap B_2) = P(B_2)P(A|B_2),$$

en donde se conocen $P(B_1) = 0.75$, $P(B_2) = 0.25$, $P(A|B_1) = 0.92$, y $P(A|B_2) = 0.9$; sustituyendo

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) \\ &= (0.75)(0.92) + (0.25)(0.90) = 0.915. \end{aligned}$$

Nótese que en el ejemplo 2.4 se tienen únicamente dos proveedores, B_1 y B_2. En general, si existen n alternativas disjuntas B_1, B_2 ... B_n, la probabilidad total de un

$B_1, B_2, \ldots, B_n,$

resultado final, por ejemplo A, está dada por

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i). \tag{2.10}$$

2.7 Eventos estadísticamente independientes

Al considerar la probabilidad condicional de algún evento A, dada la ocurrencia de otro evento B, siempre se implica que las probabilidades de A y B son de alguna manera dependientes entre sí. En otras palabras, la información con respecto a la ocurrencia de B afectará la probabilidad de A. Supóngase que la ocurrencia de B no tiene ningún efecto sobre la probabilidad de A, en el sentido de que la probabilidad condicional $P(A|B)$ es igual a la probabilidad marginal $P(A)$, aun a pesar de que haya ocurrido el evento B. Esta situación origina un concepto muy importante que se conoce como independencia estadística.

Definición 2.15 Sean A y B dos eventos cualesquiera de un espacio muestral S. Se dice que el evento A es *estadísticamente independiente* del evento B si $P(A|B) = P(A)$.

Algunas consecuencias de la definición 2.15 se convierten en evidentes en este momento, dado que

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

si A es independiente de B,

$$P(A|B) = P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

o

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Además, puesto que

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A),$$

entonces

$$P(A)P(B) = P(A)P(B|A)$$

o

$$P(B) = P(B|A).$$

Por lo tanto, puede concluirse que si un evento A es estadísticamente independiente de **B**, entonces el evento **B** es independiente de **A** y se verifican las tres relaciones siguientes:

1. $P(A|B) = P(A)$,
2. $P(B|A) = P(B)$, y
3. $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Con la siguiente definición se extenderá el concepto de independencia estadística.

Definición 2.16 Los eventos $A_1, A_2 \ldots A_k$ de un espacio muestral S son estadísticamente independientes si y sólo si la probabilidad conjunta de cualquier 2, 3 ... k de ellos es igual al producto de sus respectivas probabilidades marginales.

De esta manera, los eventos A, B y C son estadísticamente independientes, sí y sólo si

1. $P(A \cap B) = P(A)P(B)$,
2. $P(A \cap C) = P(A)P(C)$,
3. $P(B \cap C) = P(B)P(C)$, y
4. $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$

Ejemplo 2.5 Un sistema contiene cinco componentes que se encuentran conectadas entre sí como se muestra en la figura 2.2, donde las probabilidades indican la seguridad de que la componente funcione adecuadamente. Si se supone que el funcionamiento de una componente en particular es independiente del de las demás, ¿cuál es la probabilidad de que el sistema trabaje?

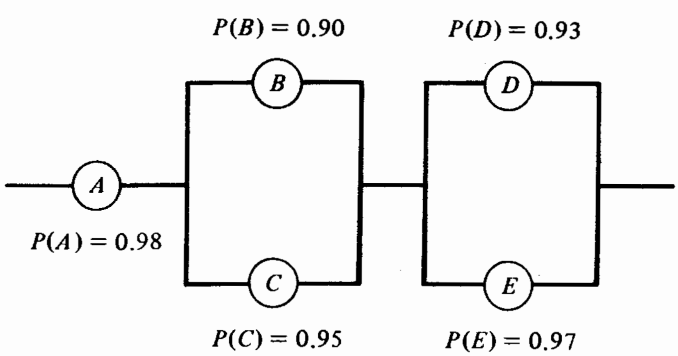

FIGURA 2.2 Configuración de un sistema con cinco componentes

Establecida la suposición de independencia, el sistema puede trabajar si las componentes A y B y/o C, y D y/o E lo hacen. De esta manera, la probabilidad de que el sistema trabaje, $P(F)$, puede expresarse como

$$P(F) = P(A)P(B \cup C)P(D \cup E);$$

pero nótese que $P(B \cup C) = 1 - P(\overline{B})P(\overline{C})$ y $P(D \cup E) = 1 - P(\overline{D})P(\overline{E})$, porque, por ejemplo $P(\overline{B})P(\overline{C})$ es la probabilidad de que no trabaje la componente B y tampoco la C. Por lo tanto,

$$P(F) = (0.98)(0.995)(0.9979) = 0.973.$$

2.8 El teorema de Bayes

Recuérdese el ejemplo 2.4. Supóngase que cuando se reciben los reguladores de voltaje se almacenan de manera tal que no puede distinguirse el proveedor. Además, supóngase que se desea determinar la probabilidad de que un regulador en particular fue vendido por el proveedor B_2 cuando se sabe que funciona de acuerdo con las especificaciones. En este caso se busca la probabilidad condicional de B_2 dada la ocurrencia del evento A. Por lo tanto

$$P(B_2|A) = \frac{P(B_2 \cap A)}{P(A)},$$

pero

$$P(B_2 \cap A) = P(B_2)P(A|B_2)$$

y

$$P(B_2|A) = \frac{P(B_2)P(A|B_2)}{P(A)};$$

así que,

$$P(B_2|A) = \frac{(0.25)(0.9)}{0.915} = 0.2459.$$

Se puede generalizar el método empleado para resolver este problema, con el fin de originar el teorema de Bayes.

Teorema 2.4 Si $B_1, B_2, \ldots, B_n$ son n eventos mutuamente excluyentes, de los cuales uno debe ocurrir, es decir $\sum_{i=1}^{n} P(B_i) = 1$, entonces

$$P(B_j|A) = \frac{P(B_j)P(A|B_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i)}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.11}$$

La expresión dada por (2.11) fue desarrollada por el reverendo Thomas Bayes (1702-1761) y se conoce como teorema de Bayes. A primera vista no es más que una aplicación de las probabilidades condicionales. Sin embargo, ha sido clave en el desarrollo de la inferencia estadística bayesiana en la que se emplea la interpretación subjetiva de la probabilidad. Tal como se indicó en el capítulo uno, la inferencia bayesiana no se tratará con detalle en este libro. Sin embargo, se considerarán algunas cuestiones bayesianas de vez en cuando, de manera que el lector pueda obtener una mejor perspectiva de la inferencia estadística. Los siguientes son ejemplos del análisis bayesiano.

Supóngase que un investigador conduce un experimento en el que sabe que el resultado de interés estará afectado por cualquiera de las n alternativas $B_1, B_2 \ldots B_n$ que predomine. A pesar de que no está seguro cuál de todas las alternativas predominará, posee cierta información con base en la cual está dispuesto a formular un juicio subjetivo para las probabilidades de ocurrencia de las n alternativas. De esta forma, asigna probabilidades $P(B_1), P(B_2) \ldots P(B_n)$ para las n alternativas antes de obtener cualquier evidencia experimental. Dado que estas probabilidades reflejan el juicio o grado de creencia del investigador con respecto a las ocurrencias de $B_1, B_2 \ldots B_n$, *antes de que éstas se presenten se conocen como probabilidades a priori.* Con ello el investigador obtendrá una evidencia experimental a partir de un conjunto de datos que se denota por A, y se observa bajo una alternativa específica B_j. En este momento se pueden calcular las probabilidades condicionales $P(A|B_j)$. Éstas permitirán la determinación de la probabilidad B_j dada la evidencia experimental A, mediante el empleo del teorema de Bayes. Las probabilidades condicionales $P(B_j|A)$, $j = 1, 2, \ldots, n$ se conocen como probabilidades *a posteriori* porque se determinan una vez obtenida la evidencia experimental. Por lo tanto, las probabilidades $P(B_j|A)$ reflejan el grado de creencia corregido con respecto a las alternativas $B_1, B_2, \ldots B_n$ después de obtener los datos experimentales.

Ejemplo 2.6 Durante los últimos años se ha escrito mucho sobre la posible relación entre el fumar y el cáncer pulmonar. Supóngase que en un centro médico, de todos los fumadores de quienes se sospecha que tenían cáncer pulmonar, el 90% lo tenía mientras que únicamente el 5% de los no fumadores lo padecía. Si la proporción de fumadores es de 0.45, ¿cuál es la probabilidad de que un paciente con cáncer pulmonar, seleccionado al azar, sea fumador?

Sean B_1 y B_2 los eventos "el paciente es fumador" y "el paciente es no fumador" respectivamente, y sea A el evento "el paciente tiene cáncer pulmonar". B_1 y B_2 son las alternativas que pueden predominar. Se supone que las probabilidades *a priori*, para estas dos alternativas, son 0.45 y 0.55 respectivamente. Si un paciente tiene o no cáncer pulmonar puede estar afectado por cualquiera de las dos alternativas que predominen y que constituyen la evidencia experimental. Se sabe que $P(A|B_1) = 0.9$ y $P(A|B_2) = 0.05$. Se desea determinar la probabilidad *a posteriori* de seleccionar un fumador, puesto que el paciente tiene cáncer, o $P(B_1|A)$.

Del teorema de Bayes se tiene

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2)}$$

$$= \frac{(0.45)(0.9)}{(0.45)(0.9) + (0.55)(0.05)}$$

$$= 0.9364.$$

La probabilidad de que un paciente con cáncer pulmonar, seleccionado aleatoriamente sea fumador, es de 0.9364.

Ejemplo 2.7 **Una compañía estudia la comercialización de un nuevo producto. El presidente de la compañía desea que el producto sea superior al de su más cercano competidor. Con base en una evaluación preliminar que realizó el personal clave, se decide asignar una posibilidad del 50% de que el producto sea superior al ofrecido por el competidor, 30% de que tenga la misma calidad y un 20% de que sea inferior. Un estudio de mercado sobre el producto concluye que éste es superior al del competidor. Con base en la experiencia sobre los resultados de las encuestas, se determina que si el producto realmente es superior, la probabilidad de que la encuesta alcance la misma conclusión es 0.7. Si el producto tiene la misma calidad que el del competidor, la probabilidad de que la encuesta dé como resultado un producto superior es 0.4. Si el producto es inferior, la probabilidad de que la encuesta indique un producto superior es de 0.2. Dado el resultado de la encuesta, ¿cuál es la probabilidad, corregida, de obtener un producto superior?**

Este es un ejemplo en el que ilustra cómo una organización puede actualizar y revisar las probabilidades iniciales al tener disponible nueva información. Sean B_1, B_2 y B_3 los eventos el producto es superior, tiene la misma calidad y es inferior al del competidor, respectivamente. Las probabilidades *a priori* correspondientes son 0.5, 0.3 y 0.2. Sea A el evento "la encuesta revelará un producto superior". Las probabilidades condicionales que involucran una evidencia experimental son $P(A|B_1) = 0.7$, $P(A|B_2) = 0.4$ y $P(A|B_3) = 0.2$. La probabilidad *a posteriori* $P(B_1|A)$ deseada es:

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3)}$$

$$= 0.6863.$$

2.9 Permutaciones y combinaciones

Para calcular las probabilidades de varios eventos es necesario contar el número de resultados posibles de un experimento, o contar el número de resultados que son favorables a un evento dado. El proceso de conteo puede simplificarse mediante el empleo de dos técnicas de conteo denominadas permutaciones y combinaciones.

Una *permutación* es un arreglo en un orden particular, de los objetos que forman un conjunto. Por ejemplo, considere las diferentes formas en que pueden situarse las letras *a, b* y *c*. Para la primera posición puede elegirse a cualquiera de las tres letras; para la segunda se puede escoger a cualquiera de las dos restantes y para la tercera debe seleccionarse la letra que no se utilizó. Así existen $3 \times 2 \times 1 = 6$ maneras en las que pueden arreglarse tres letras. Los seis arreglos o permutaciones son:

$$abc, acb, bac, bca, cab, cba.$$

empleando el mismo razonamiento, el número total de maneras en que pueden arreglarse las letras *a, b, c* y *d* es $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$. En general, el número de permutaciones de n objetos diferentes es:

$$n(n-1)(n-2)\cdots(2)(1). \tag{2.12}$$

El producto de un entero positivo por todos los que le preceden se denota por $n!$ y see lee "n factorial". Por ejemplo, $2! = 2 \times 1 = 2$, $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$, $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$, etc. Nótese que de (2.12) se tiene:

$$n(n-1)! = n!$$

o

$$(n-1)! = n!/n.$$

De esta manera, cuando $n = 1$, se define a $0! = 1$.

En este punto se examinarán las permutaciones de n objetos, si únicamente $r \leq n$ de éstos se emplean en cualquier ordenamiento. Igualmente, para la primera posición se puede seleccionar cualquiera de los n objetos, para la segunda uno de los restantes $n-1$, y se continúa el procedimiento hasta la r-ésima posición. En este momento se han empleado $r-1$ objetos, quedando $n-(r-1)$, a partir de los cuales se hace la selección. Por lo tanto, el número de permutaciones de n objetos si se toma r a la vez es:

$$\begin{aligned} P(n, r)^* &= n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)(n-r)!}{(n-r)!} \\ &= \frac{n!}{(n-r)!}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Nótese que si $r = n$, (2.13) se reduce al resultado anterior $P(n, n) = n!$, o el número de permutaciones de n objetos, tomando n a la vez, es $n!$.

Ejemplo 2.8 En muchos Estados de la Unión Americana, las placas de los automóviles, se identifican por tres letras y tres números. ¿Cuál es el número total si ninguna letra de placas posible puede usarse más de una ocasión en la misma placa? ¿Cuál es el número total sin esta restricción?

Con la restricción, el número de permutaciones que puede obtenerse con las 26 letras del alfabeto, tomadas tres a la vez, es:

$$P(26, 3) = \frac{26!}{23!} = \frac{26 \times 25 \times 24 \times 23!}{23!} = 15\,600.$$

* Esta es una de las muchas formas de denotar el número de permutaciones de n objetos tomando r a la vez. Otros símbolos empleados son ${}_nP_r$, P^n_r, $P_{n,r}$ y $(n)_r$.

Dado que a cada uno de los 15 600 arreglos de tres letras se les puede asignar 1 000 diferentes números de tres dígitos (000-999), el número total de placas es de 15 600 000. Sin la restricción, que es la práctica usual, las seis posiciones en una placa de automóvil pueden ocuparse de la siguiente forma: cada una de las tres primeras posiciones puede ocuparse de 26 maneras diferentes, mientras que cada una de las tres posiciones restantes puede ocuparse en una de diez formas posibles; dado que existen 26 letras y diez números, respectivamente. De esta manera el número total de placas de automóvil es $26 \times 26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 = 17\ 576\ 000$.

Una *combinación* de los objetos de un conjunto es una selección de éstos sin importar el orden. Se entenderá por el número de combinaciones de r objetos tomados de un conjunto que contiene a n de éstos, al número total de selecciones distintas en las que cada una de éstas contiene r objetos. La diferencia entre una permutación y una combinación es que en la primera el interés se centra en contar todas las posibles selecciones y todos los arreglos de éstas, mientras que en la segunda el interés sólo recae en contar el número de selecciones diferentes. De esta manera *abc* y *acd* son diferentes combinaciones de tres letras, mientras que *acd* y *adc* son distintas permutaciones de la misma combinación. Puede obtenerse el número de combinaciones de n objetos tomando r a la vez (denotada por $\binom{n}{r}$) y que se lee "n combinación r"), dividiendo el correspondiente número de permutaciones por $r!$ dado que en cada combinación existen $r!$ permutaciones. Por lo tanto:

$$\binom{n}{r}^* = P(n, r)/r!$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!\,r!}. \tag{2.14}$$

De (2.14) puede notarse que:

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{(n-n)!\,n!} = 1;$$

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{(n-0)!\,0!} = 1;$$

$$\binom{n}{n-1} = \frac{n!}{[n-(n-1)]!(n-1)!} = n;$$

y

$$\binom{n}{n-r} = \frac{n!}{[n-(n-r)]!(n-r)!} = \binom{n}{r}.$$

Dos ejemplos específicos son:

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{(5-2)!\,2!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3!2!} = 10,$$

* Otros símbolos comúnmente empleados para denotar el número de combinaciones de n objetos, tomando r a la vez, son $C(n,r)$, ${}_nC_r$, C^n_r, y $C_{n,r}$.

y

$$\binom{10}{8} = \binom{10}{2} = \frac{10!}{(10-2)!\,2!} = \frac{10 \times 9 \times 8!}{8!\,2!} = 45.$$

Ejemplo 2.9 **Supóngase que van a enviarse cinco jueces federales a cierto Estado. El jefe del senado estatal envía al presidente una lista que contiene los nombres de diez hombres y cuatro mujeres. Si el presidente decide que de los cinco jueces tres deben ser hombres y dos mujeres ¿de cuántas maneras puede lograrse lo anterior, empleando a los candidatos de la lista?**

El número de maneras distintas en que pueden seleccionarse tres hombres de entre diez es:

$$\binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7!\,3!} = 120.$$

Asimismo, el número de maneras en que pueden seleccionarse dos mujeres de entre cuatro es:

$$\binom{4}{2} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!\,2!} = 6.$$

Puesto que el número de maneras en que pueden seleccionarse tres hombres de entre diez es 120, y el de dos mujeres de entre cuatro es seis, el número de maneras en que ambos eventos pueden ocurrir es:

$$\binom{10}{3}\binom{4}{2} = 720.$$

Referencias

1. P. G. Hoel, *Introduction to mathematical statistics*, 4th ed., Wiley, New York, 1971.
2. A. M. Mood and F. A. Graybill, *Introduction to the theory of statistics*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1963.

Ejercicios

2.1. Los empleados de la compañía New Horizons se encuentran separados en tres divisiones: administración, operación de planta y ventas. La siguiente tabla indica el número de empleados en cada división clasificados por sexo:

	Mujer (M)	*Hombre (H)*	*Totales*
Administración (A)	20	30	50
Operación de planta (*O*)	60	140	200
Ventas (*V*)	100	50	150
Totales	180	220	400

a) Usar un diagrama de Venn para ilustrar los eventos O y M para todos los empleados de la compañía. ¿Son mutuamente excluyentes?

b) Si se elige aleatoriamente un empleado:

1. ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer?
2. ¿Cuál es la probabilidd de que trabaje en ventas?
3. ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre y trabaje en la división de administración?
4. ¿Cuál es la probabilidad de que trabaje en la división de operación de planta, si es mujer?
5. ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer si trabaja en la división de operación de planta?

c) ¿Son los eventos V y H estadísticamente independientes?

d) ¿Son los eventos A y M estadísticamente independientes?

e) Determinar las siguientes probabilidades:

1. $P(A \cup M)$
2. $P(A \cup \overline{M})$
3. $P(O \cap F)$
4. $P(M|A)$

2.2. Con la definición 2.14 demuéstrese que para cualesquiera dos eventos, A y B, $P(A|B) + P(\overline{A}|B) = 1$, con tal de que $P(B) \neq 0$.

2.3. Sean A y B dos eventos cualquiera de S. Si A y B son mutuamente excluyentes, muéstrese que no pueden ser independientes. Dedúzcase cuándo dos eventos independientes son, también, mutuamente excluyentes.

2.4. Sean A y B dos eventos cualquiera de S. Empléese un diagrama de Venn para demostrar que $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$.

2.5. Una familia tiene tres hijos. Determinar todas las posibles permutaciones, con respecto al sexo de los hijos. Bajo suposiciones adecuadas, ¿cuál es la probabilidad de que, exactamente, dos de los hijos tengan el mismo sexo?, ¿cuál es la probabilidad de tener un varón y dos mujeres?, ¿cuál es la probabilidad de tener tres hijos del mismo sexo?

2.6. Se extraen, sin reemplazo, dos cartas de una baraja. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean ases?

2.7. Se lanza una moneda diez veces y en todos los lanzamientos el resultado es cara. ¿Cuál es la probabilidad de este evento?, ¿cuál es la probabilidad de que en el decimoprimero lanzamiento el resultado sea cruz?

2.8. Una agencia automotriz recibe un embarque de 20 automóviles nuevos. Entre éstos, dos tienen defectos. La agencia decide seleccionar, aleatoriamente, dos automóviles de entre los 20 y aceptar el embarque si ninguno de los dos vehículos seleccionados tiene defectos. ¿Cuál es la probabilidad de aceptar el embarque?

2.9. Se lanza una moneda con una probabilidad de 2/3 que el resultado sea cara. Si aparece una cara, se extrae una pelota, aleatoriamente, de una urna que contiene dos pelotas rojas y tres verdes. Si el resultado es cruz se extrae una pelota, de otra urna, que contiene dos rojas y dos verdes. ¿Cuál es la probabilidad de extraer una pelota roja?

2.10. De entre 20 tanques de combustible fabricados para el transbordador espacial, tres se encuentran defectuosos. Si se seleccionan aleatoriamente cuatro tanques:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno de los tanques se encuentre defectuoso?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que uno de los tanques tenga defectos?

2.11. La probabilidad de que cierto componente eléctrico funcione es de 0.9. Un aparato contiene dos de éstos componentes. El aparato funcionará mientras lo haga, por lo menos, uno de los componentes.

a) Sin importar cuál de los dos componentes funcione o no, ¿cuáles son los posibles resultados y sus respectivas probabilidades? (Puede suponerse independiencia en la operación entre los componentes.)

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el aparato funcione?

2.12. Un sistema contiene tres componentes *A, B* y *C*. Éstos pueden conectarse en una, cualquiera, de las cuatro configuraciones mostradas en la figura 2.3. Si los tres componentes operan de manera independiente y si la probabilidad de que uno, cualquiera de ellos, esté funcionando es de 0.95, determinar la probabilidad de que el sistema funcione para cada una de las cuatro configuraciones.

2.13. Una forma de incrementar la probabilidad de operación de un sistema (conocida como la confiabilidad del sistema), es mediante la introducción de una copia de los componentes en una configuración paralela, como se ilustra en la segunda parte de la figura 2.3. Supóngase que la Nasa desea una probabilidad no menor de 0.999 99, de que el transbordador espacial entre en órbita alrededor de la tierra, con éxito. ¿Cuántos motores cohete deben configurarse en paralelo para alcanzar esta confiabilidad de operación si se sabe que la probabilidad de que uno, cualquiera, de los motores funcione adecuadamente es de 0.95? Supóngase que los motores funcionan de manera independiente entre sí.

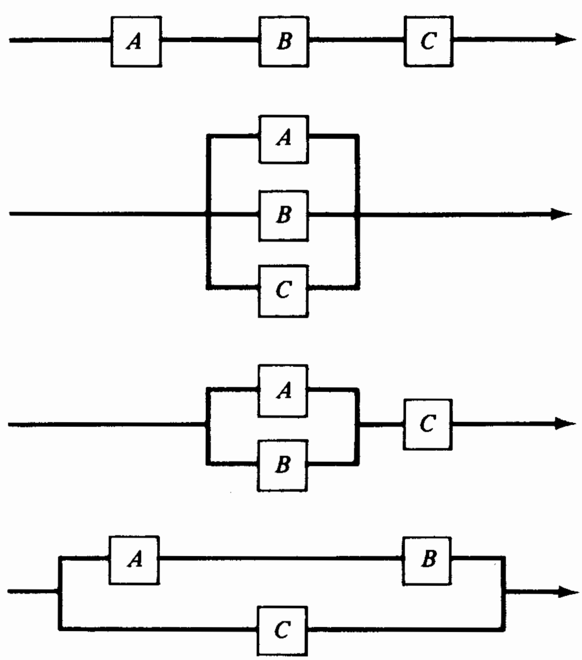

FIGURA 2.3 Cuatro configuraciones para tres componentes

2.14. Supóngase que la probabilidad de que los Potros de Baltimore ganen el campeonato de la Conferencia Americana es de 0.25, y la probabilidad de que lo obtengan los Cargadores de San Diego es de 0.20. Además, la probabilidad de que el campeón de la Conferencia Americana gane el Super Tazón es 0.45, 0.55 o 0.35, dependiendo de si los Potros, los Cargadores o algún otro equipo gana el campeonato.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un equipo de la Conferencia Americana gane el Super Tazón?

b) Si un equipo de la Conferencia Americana gana el Super Tazón, ¿cuál es la probabilidad de que los Potros de Baltimore ganen el título de su Conferencia?

2.15. El 5% de las unidades producidas en una fábrica se encuentran defectuosas cuando el proceso de fabricación se encuentra bajo control. Si el proceso se encuentra fuera de control, se produce un 30% de unidades defectuosas. La probabilidad marginal de que el proceso se encuentre bajo control es de 0.92. Si se escoge aleatoriamente una unidad y se encuentra que es defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que el proceso se encuentre bajo control?

2.16. Una planta armadora recibe microcircuitos provenientes de tres distintos fabricantes B_1, B_2 y B_3. El 50% del total se compra a B_1 mientras que a B_2 y B_3 se les compra un 25% a cada uno. El porcentaje de circuitos defectuosos para B_1, B_2 y B_3 es 5, 10 y 12% respectivamente. Si los circuitos se almacenan en la planta sin importar quién fue el proveedor:

a) Determinar la probabilidad de que una unidad armada en la planta contenga un circuito defectuoso.

b) Si un circuito no está defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido vendido por el proveedor B_2?

2.17. Un inversionista está pensando en comprar un número muy grande de acciones de una compañía. La cotización de las acciones en la bolsa, durante los seis meses anteriores, es de gran interés para el inversionista. Con base en esta información, se observa que la cotización se relaciona con el producto nacional bruto. Si el PNB aumenta, la probabilidad de que el valor de las acciones aumente es de 0.8. Si el PNB es el mismo, la probabilidad de que las acciones aumenten su valor es de 0.2. Si el PNB disminuye, la probabilidad es de sólo 0.1. Si para los siguientes seis meses se asignan las probabilidades 0.4, 0.3 y 0.3 a los eventos, el PNB aumenta, es el mismo y disminuye, respectivamente, determinar la probabilidad de que las acciones aumenten su valor en los próximos seis meses.

2.18. Con base en varios estudios una compañía ha clasificado, de acuerdo con la posibilidad de descubrir petróleo, las formaciones geológicas en tres tipos. La compañía pretende perforar un pozo en un determinado sitio, al que se le asignan las probabilidades de 0.35, 0.40 y 0.25 para los tres tipos de formaciones respectivamente. De acuerdo con la experiencia, se sabe que el petróleo se encuentra en un 40% de formaciones del tipo I, en un 20% de formaciones del tipo II y en un 30% de formaciones del tipo III. Si la compañía no descubre petróleo en ese lugar, determínese la probabilidad de que exista una formación del tipo II.