3 Probabilidad

PLAN GENERAL DEL CAPÍTULO

3-1 ESPACIOS MUESTRALES Y EVENTOS

3-1.1 Introducción

Cuando se mide la corriente eléctrica en un alambre delgado de cobre, se está realizando un **experimento**. Sin embargo, los resultados de las repeticiones de la medición día con día pueden diferir un tanto debido a ligeras variaciones en las variables del experimento que no están sujetas a control, incluyendo los cambios en la temperatura ambiente, las ligeras variaciones en el manómetro (presión atmosférica) y las pequeñas impurezas en la composición química del alambre si se seleccionan lugares diferentes, y las variaciones en la fuente de la corriente. Por consi-

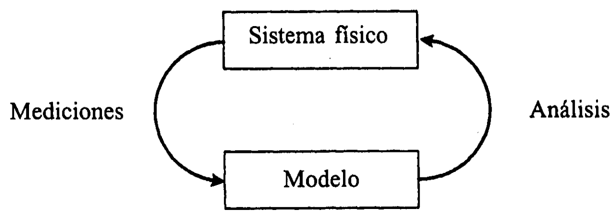


Figura 3-1 Iteración continua entre modelo y sistema físico.

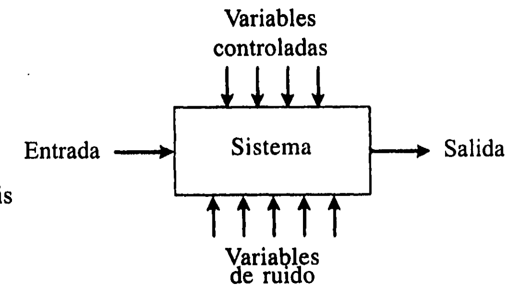


Figura 3-2 Las variables de ruido afectan la transformación de entradas en salidas.

guiente, se dice que este experimento (así como muchos que realizamos) tiene un componente **aleatorio**. En algunos casos, las variaciones aleatorias que ocurren son tan pequeñas, en comparación con los objetivos del experimento, que pueden ignorarse. Sin embargo, casi siempre está presente la variación, y su magnitud puede ser lo suficientemente grande para que las conclusiones importantes del experimento no sean evidentes. En estos casos, los métodos presentados en este libro para hacer un modelo y el análisis de los resultados experimentales son muy valiosos.

Sin importar qué tan cuidadosamente se diseñe y se conduzca un experimento, es frecuente que ocurran variaciones. Nuestra meta es comprender, cuantificar y hacer un modelo del tipo de variaciones que se encuentran con frecuencia. Cuando se incorpora la variación en nuestros razonamientos y análisis, es posible formular juicios fundamentados de los resultados que no se invalidan por la variación.

Los modelos y análisis que incluyen la variación no son diferentes de los modelos usados en otras áreas de la ingeniería y las ciencias. En la figura 3-1 se muestran los componentes importantes. Se desarrolla un modelo matemático (o abstracción) del sistema físico. No necesita ser una abstracción perfecta. Por ejemplo, las leyes de Newton no son descripciones perfectas de nuestro universo físico. Aun así, constituyen modelos útiles que pueden estudiarse y analizarse para cuantificar en forma aproximada el desempeño de un amplio rango de productos de la ingeniería. Dada una abstracción matemática que esté validada con mediciones de nuestro sistema, podemos usar el modelo para comprender, describir y cuantificar aspectos importantes del sistema físico, así como para predecir la respuesta del sistema con las entradas.

En este libro se exponen modelos que toman en cuenta las variaciones en las salidas de un sistema, aun cuando las variables sujetas a control no cambien de manera intencionada durante el estudio. En la figura 3-2 se muestra la representación gráfica de un modelo que incorpora entradas no controlables (ruido) que se combinan con las entradas controlables para producir la salida del sistema. Debido a las entradas no controlables, los mismos ajustes de las entradas controlables no resultan en salidas idénticas cada vez que se mide el sistema.

Para el ejemplo de la medición de la corriente eléctrica en un alambre de cobre, el modelo del sistema podría ser simplemente la ley de Ohm, como se señaló en la sección 1-3. Debido a las entradas no controlables, son de esperarse variaciones en las mediciones de la corriente. La ley de Ohm podría ser una aproximación adecuada. Sin embargo, si las variaciones son grandes respecto del uso previsto del dispositivo bajo estudio, quizá sería necesario ampliar el modelo a fin de incluir la variación. Muchas veces es difícil especular sobre la magnitud de las variaciones sin mediciones empíricas. Sin embargo, con suficientes mediciones es posible llegar a una aproximación de la magnitud de la variación y considerar su efecto sobre el desempeño de otros

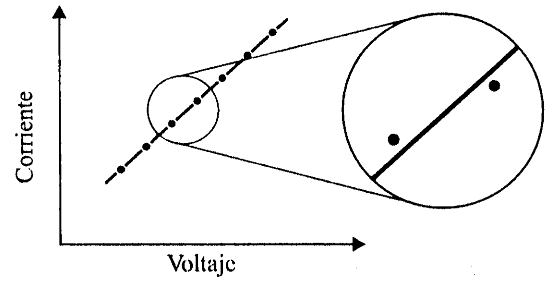


Figura 3-3 Un examen más detallado del sistema identifica desviaciones del modelo.

dispositivos, tales como amplificadores, en el circuito. Por lo tanto, estamos confirmando el modelo de la figura 3-2 como una descripción más conveniente de la medición de la corriente. En consecuencia, las técnicas que se presentan en este texto para el análisis de modelos que incluyen variación, con frecuencia resultan de utilidad (véase también la figura 3-3).

Como un ejemplo más, en el diseño de un sistema de comunicaciones, como una red de computadoras o una red de comunicación de voz, la capacidad de información disponible para atender a los usuarios que utilizan la red es una consideración de diseño importante. Para la comunicación de voz, es necesario adquirir suficientes líneas externas de la compañía telefónica para cumplir con los requerimientos de un negocio. Suponiendo que cada línea puede transmitir una sola conversación, ¿cuántas líneas deberán contratarse? Si se adquieren muy pocas líneas, las llamadas pueden retrasarse o perderse. La adquisición de demasiadas líneas incrementa los costos. De manera creciente, se necesita el diseño y desarrollo de productos para satisfacer los requerimientos del cliente *a un costo competitivo.*

En el diseño del sistema de comunicación de voz, se necesita un modelo para el número de llamadas y la duración de las mismas. Inclusive saber que en promedio las llamadas ocurren cada cinco minutos y que duran cinco minutos, no es suficiente. Si las llamadas llegaran precisamente en intervalos de cinco minutos y duraran exactamente cinco minutos, entonces bastaría una sola línea telefónica. Sin embargo, la más ligera variación en el número de llamadas o en su duración ocasionaría que algunas llamadas fueran bloqueadas por otras (véase la figura 3-4). Un sistema diseñado sin considerar la variación resultará funestamente inadecuado para uso práctico. Es necesario que el modelo para el número y duración de las llamadas incluya la variación

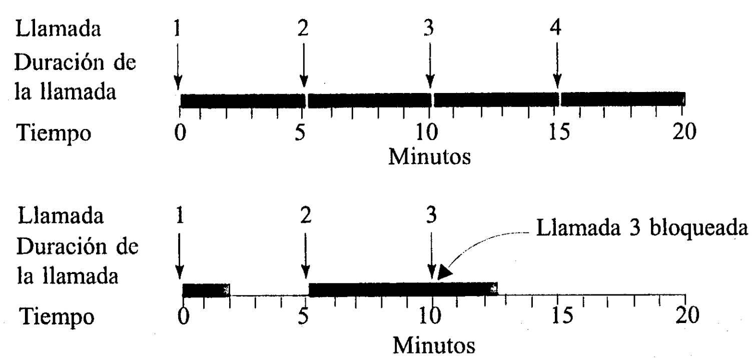


Figura 3-4 La variación provoca interrupciones en el sistema.

como componente integral. El análisis de modelos que incluyan la variación es importante para el diseño del sistema telefónico.

3-1.2 Espacios muestrales

Definición

Un **experimento aleatorio** es aquel que puede producir resultados diferentes, aun cuando se repita siempre de la misma manera.

La energía consumida en una reacción química puede variar cuando el experimento se repite en tiempos diferentes o en laboratorios diferentes. Se trata de un experimento aleatorio con varios resultados. Supóngase que algunos de los componentes electrónicos de un día de producción no cumplen con las especificaciones de regulación del encendido de un sistema de alto acabado. Al seleccionar dos piezas del lote producido ese día tomando arbitrariamente dos de ellas y observar si cada pieza cumple con las especificaciones de regulación del encendido puede considerarse un experimento aleatorio. Los resultados dependen de las dos piezas particulares que por casualidad se hayan seleccionado. Si este experimento se repitiera, podrían escogerse dos piezas diferentes. Por consiguiente, podrían obtenerse resultados de la regulación del encendido diferentes.

Para hacer el modelo de un experimento aleatorio y analizarlo, es necesario entender el conjunto de los resultados posibles del experimento. En la presente introducción a la probabilidad se hace uso de los conceptos básicos de conjuntos y de las operaciones con los mismos. Se supone que el lector está familiarizado con estos temas.

Definición

Al conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio se le llama **espacio muestral** del experimento. El espacio muestral se denota por S.

Es frecuente definir el espacio muestral con base en los objetivos del análisis.

EJEMPLO 3-1

Considérese un experimento en el que se selecciona un conector y se mide su espesor. Los valores posibles del espesor dependen de la resolución del instrumento de medición, así como de los límites superior e inferior del espesor. Sin embargo, podría resultar conveniente definir el espacio muestral simplemente como la recta real R,

$$S = R$$

aun cuando no puede ocurrir un valor negativo del espesor.

Si el único objetivo del análisis es considerar si una pieza particular tiene espesor bajo, medio o alto, entonces el espacio muestral podría tomarse como el conjunto de los tres resultados

$$S = \{bajo, medio, alto\}$$

Si el único objetivo del análisis es considerar si una pieza particular cumple o no con las especificaciones de fabricación, entonces el espacio muestral podría simplificarse al conjunto de los dos resultados

$$S = \{sí, no\}$$

que indica si la pieza cumple o no con las especificaciones.

EJEMPLO 3-2

Si se seleccionan y miden dos conectores, entonces la extensión de la recta real R llevará el espacio muestral al plano

$$S = R \times R$$

Si el único objetivo del análisis es considerar si las piezas particulares cumplen o no con las especificaciones de fabricación, entonces cualquiera de las dos puede cumplir con ellas o no. Se abrevian *sí* y *no* como s y n. Si el par ordenado sn indica que el primer conector cumple con las especificaciones y el segundo no lo hace, entonces el espacio muestral puede representarse por los cuatro resultados

$$S = \{ss, sn, ns, nn\}$$

Si sólo nos interesáramos en el número de piezas de la muestra que cumple con las especificaciones, el espacio muestral podría resumirse como

$$S = \{0, 1, 2\}$$

Como otro ejemplo, considérese un experimento en el que el espesor se mide hasta que un conector no cumple con las especificaciones. El espacio muestral puede representarse como

$$S = \{n, sn, ssn, sssn, ssssn, \text{y así sucesivamente}\}$$

En los experimentos aleatorios que implican seleccionar artículos de un lote, se indicará si el artículo seleccionado se reemplaza o no antes de seleccionar el siguiente. Por ejemplo, si el lote se compone de tres artículos $\{a, b, c\}$ y el experimento consiste en seleccionar dos artículos **sin reemplazo**, el espacio muestral puede representarse como $S = \{ab, ac, ba, bc, ca, cb\}$. Sin embargo, si los artículos se reemplazan antes de seleccionar el siguiente, se dice que el muestreo es **con reemplazo**. Entonces, los resultados posibles son $S = \{aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc\}$.

3-1.3 Eventos

Con frecuencia nos interesamos en un conjunto de resultados relacionados de un experimento aleatorio.

Definición

Un **evento** es un subconjunto del espacio muestral de un experimento aleatorio.

Con frecuencia tenemos interés en describir nuevos eventos a partir de combinaciones de los eventos existentes. Dado que los eventos son subconjuntos, es posible usar las operaciones básicas con conjuntos tales como la unión, intersección y el complemento para formar otros eventos de interés. Algunas de las operaciones básicas con conjuntos se resumen a continuación en términos de eventos:

La **unión** de dos eventos es el evento que consta de todos los resultados que están contenidos en cualquiera de los dos eventos. La unión se denota por $E_1 \cup E_2$.

La **intersección** de dos eventos es el evento que consta de todos los resultados que están contenidos en los dos eventos. La intersección se denota por $E_1 \cap E_2$.

El **complemento** de un evento en un espacio muestral es el conjunto de resultados en el espacio muestral que no están en el evento. El complemento del evento E se denota por E'.

EJEMPLO 3-3

En el ejemplo 3-2, suponga que el conjunto de todos los resultados para los que al menos una pieza cumple con las especificaciones se denota por E_1. Entonces,

$$E_1 = \{ss, sn, ns\}$$

El evento de que ninguna de las dos piezas cumpla con las especificaciones, denotado por E_2, sólo contiene el resultado, $E_2 = \{nn\}$. Otros ejemplos de eventos son $E_3 = \varnothing$, el conjunto vacío, y $E_4 = S$, el espacio muestral.

Si $E_5 = \{sn, ns, nn\}$, entonces

$$E_1 \cup E_5 = S \qquad E_1 \cap E_5 = \{sn, ns\} \qquad E_1' = \{nn\}$$

EJEMPLO 3-4

Un modelo de las mediciones del tiempo necesario para completar una reacción química podría ser el espacio muestral $S = (0, \infty)$, el conjunto de los números reales positivos. Sea

$$E_1 = \{x \mid 1 \leq x < 10\}$$

y sea

$$E_2 = \{x \mid 3 < x < 118\}$$

Entonces,

$$E_1 \cup E_2 = \{x \mid 1 \leq x < 118\} \quad \text{y} \quad E_1 \cap E_2 = \{x \mid 3 < x < 10\}$$

Además,

$$E_1' = \{x \mid x \geq 10\}$$

y

$$E_1' \cup E_2 = \{x \mid 10 \leq x < 118\}$$

EJEMPLO 3-5

Se analizan muestras de plástico de policarbonato para determinar la resistencia a las rayaduras y la resistencia a los impactos. Los resultados de 49 muestras se resumen a continuación:

		resistencia a las rayaduras	
		alta	baja
resistencia a los impactos	alta	40	4
	baja	2	3

Sea que A denote el evento de que una muestra tiene alta resistencia a los impactos y sea que B denote el evento de que una muestra tiene alta resistencia a las rayaduras. Determine el número de muestras en $A \cap B$, A' y $A \cup B$.

El evento $A \cap B$ consta de las 40 muestras para las que la resistencia a las rayaduras y a los impactos son altas. El evento A' consta de las 7 muestras para las que la resistencia a los impactos es baja. El evento $A \cup B$ consta de las 46 muestras para las que la resistencia a los impactos, la resistencia a las rayaduras o ambas son altas.

Con frecuencia se usan diagramas para ilustrar las relaciones entre conjuntos y estos diagramas también se usan para describir las relaciones entre eventos. Pueden usarse **diagramas de Venn** para representar un espacio muestral y los eventos en un espacio muestral. Por ejemplo, en la figura 3-5a el espacio muestral del experimento aleatorio se representa como los puntos del rectángulo S. Los eventos A y B son los subconjuntos de puntos en las regiones

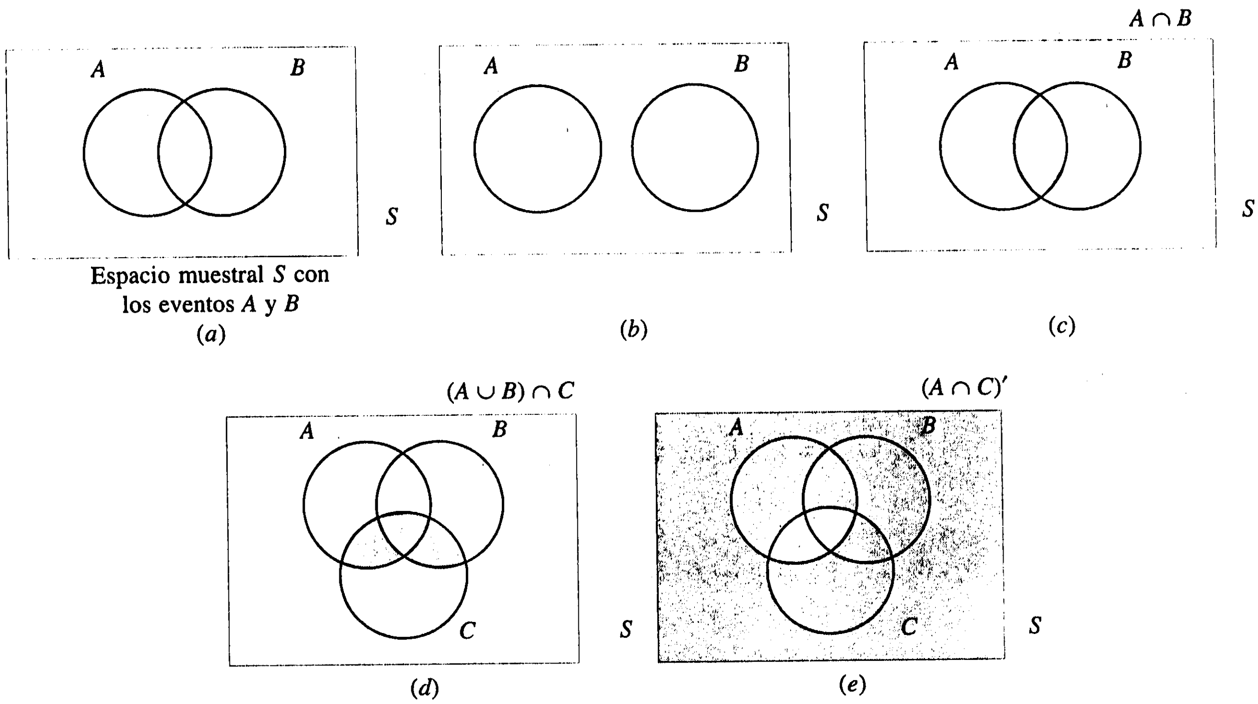


Figura 3-5 Diagramas de Venn.

indicadas. En la figura 3-5*b* se ilustran dos eventos que no tienen resultados comunes; en las figuras 3-5*c* a 3-5*e* se ilustran otros eventos conjuntos.

Los espacios muestrales también pueden describirse gráficamente con **diagramas de árbol**. Cuando un espacio muestral puede construirse en varios pasos o etapas, cada una de las n_1 formas de completar el primer paso puede representarse como la rama de un árbol. Cada una de las formas de completar el segundo paso puede representarse como n_2 ramas que empiezan en los extremos de las ramas originales, y así sucesivamente.

EJEMPLO 3-6

Cada mensaje en un sistema de comunicación digital se clasifica de acuerdo a si se recibe dentro del tiempo especificado por el diseño del sistema. Si se clasifican tres mensajes, use un diagrama de árbol para representar el espacio muestral de los resultados posibles.

Cada mensaje puede recibirse a tiempo o retrasado. Los resultados posibles para los tres mensajes pueden representarse con ocho ramas en el diagrama de árbol mostrado en la figura 3-6.

EJEMPLO 3-7

Un fabricante de automóviles ofrece vehículos equipados con accesorios opcionales. El pedido de cada vehículo se hace

Con o sin transmisión automática.

Con o sin aire acondicionado.

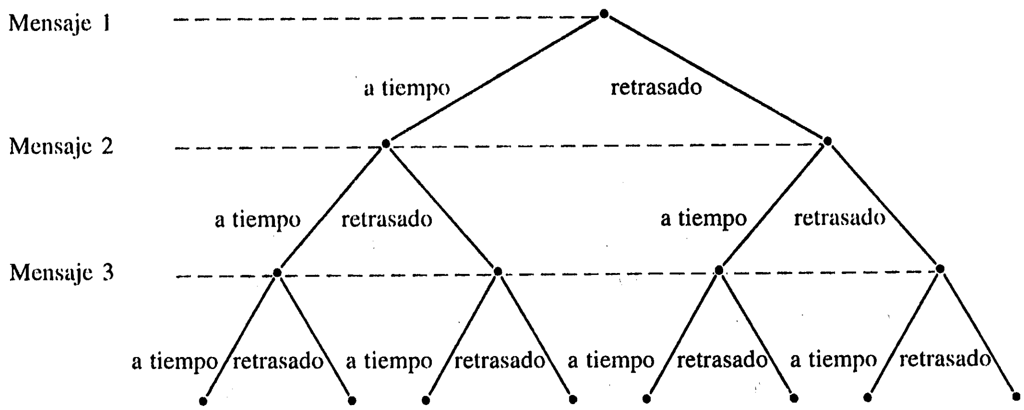


Figura 3-6 Diagrama de árbol para los tres mensajes.

Con una de tres opciones de un sistema estéreo.

Con uno de cuatro colores exteriores.

Si el espacio muestral consta del conjunto de todos los tipos de vehículos posibles, ¿cuál es el número de resultados en el espacio muestral? El espacio muestral contiene 48 resultados. El diagrama de árbol de los diferentes tipos de vehículos se muestra en la figura 3-7.

EJEMPLO 3-8

Considérese una ampliación del ejemplo anterior en la que el fabricante de automóviles ofrece otra opción: el color interior. Hay cuatro opciones para el color interior: rojo, negro, azul o café. Sin embargo,

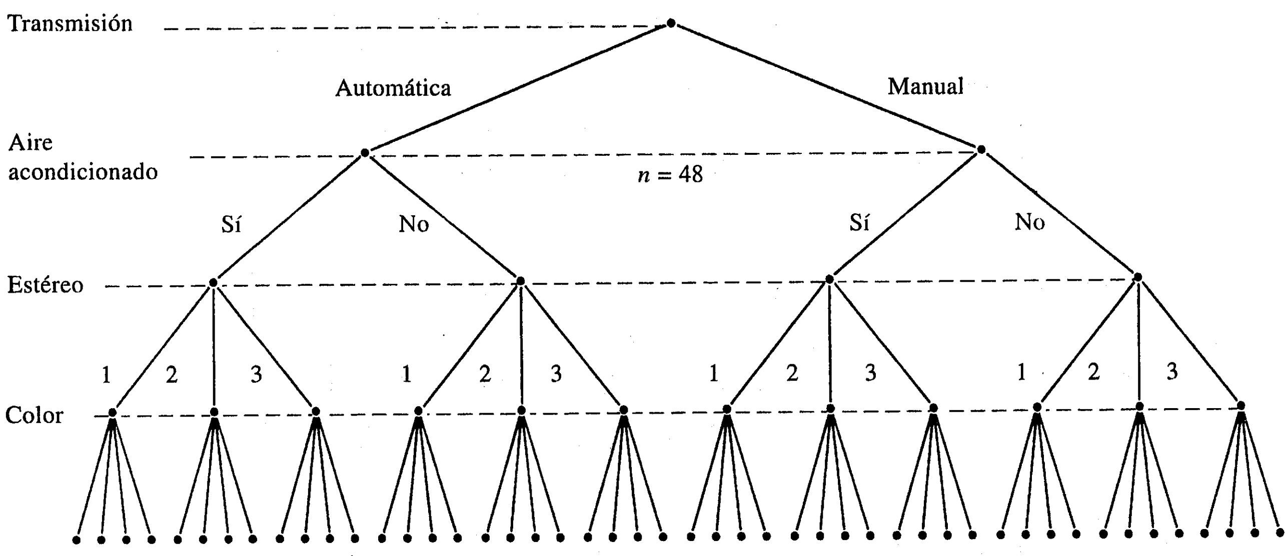


Figura 3-7 Diagrama de árbol para los diferentes tipos de vehículos.

Con un exterior rojo, sólo puede escogerse un interior negro o rojo.

Con un exterior blanco, puede escogerse cualquier color interior.

Con un exterior azul, sólo puede escogerse un interior negro, rojo o azul.

Con un exterior café, sólo puede escogerse un interior café.

Hay 12 tipos de vehículos con cada color exterior, pero el número de opciones para el color interior depende del color exterior. Como se muestra en la figura 3-8, es posible ampliar el diagrama de árbol para mostrar que hay 120 tipos diferentes de vehículos en el espacio muestral.

Dos eventos sin resultados en común presentan una importante relación.

Definición

Se dice que dos eventos, denotados como E_1 y E_2, tales que $E_1 \cap E_2 = \varnothing$ son **mutuamente excluyentes.**

Los dos eventos de la figura 3-5*b* son mutuamente excluyentes, en tanto que los dos eventos de la figura 3-5*a* no lo son.
A continuación se resumen otros resultados útiles en los que intervienen eventos. La definición del complemento de un evento implica que

$$(E')' = E$$

La ley distributiva para operaciones con conjuntos implica que

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

y

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

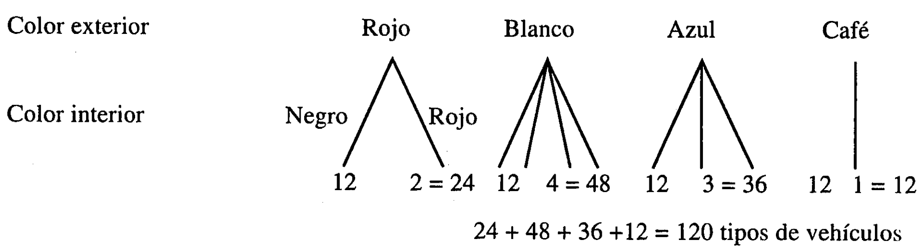


Figura 3-8 Diagrama de árbol para los diferentes tipos de vehículos con colores interiores.

Las leyes de DeMorgan implican que

$$(A \cup B)' = A' \cap B' \text{ y } (A \cap B)' = A' \cup B'$$

Asimismo, recuérdese que

$$A \cap B = B \cap A \text{ y } A \cup B = B \cup A$$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 3-1

Presente una descripción razonable del espacio muestral para cada uno de los experimentos aleatorios de los ejercicios 3-1 al 3-15. Puede haber más de una interpretación aceptable para cada experimento. Describa cualquier supuesto que haga.

3-1. Cada una de tres piezas maquinadas se clasifica como arriba o abajo de las especificaciones de la pieza.

3-2. Cada uno de cuatro bits transmitidos se clasifica como con error o sin error.

3-3. En la inspección final de fuentes de poder electrónicas podrían ocurrir tres tipos de disconformidades: funcionales, secundarias y de acabado. Las fuentes de poder defectuosas se clasifican además según sea el tipo de disconformidad.

3-4. En la fabricación de cinta para grabación digital se usa una prueba electrónica para registrar el número de bits con error en un carrete de 350 pies.

3-5. En la fabricación de cinta para grabación digital, cada una de 24 pistas se clasifica de acuerdo a si contiene o no uno o más bits con error.

3-6. Un amperímetro con pantalla de tres dígitos se usa para medir corriente eléctrica en miliamperes.

3-7. Una báscula cuya pantalla muestra dos cifras decimales se usa para medir la alimentación de materiales en una planta química en toneladas.

3-8. Las dos preguntas siguientes aparecen en el cuestionario de una encuesta para empleados. Cada respuesta se elige de la escala de cinco puntos 1 (nunca), 2, 3, 4, 5 (siempre).
"¿La corporación tiene disposición para escuchar y evaluar imparcialmente las ideas nuevas?"
"¿Con qué frecuencia mis compañeros de trabajo son importantes en mi desempeño laboral general?"

3-9. Las oquedades en una placa de ferrita se clasifican como pequeñas, medianas o grandes. El número de oquedades en cada categoría se miden por una inspección visual de una muestra.

3-10. En un proceso de fabricación pueden producirse algunas piezas que no son aceptables. Cada una de tres partes se clasifica como aceptable o no aceptable.

3-11. En el pedido de un automóvil puede especificarse transmisión automática o estándar, con o sin aire acondicionado y cualquiera de los cuatro colores rojo, azul, negro o blanco. Describa el conjunto de los pedidos posibles para este experimento.

3-12. Una pieza moldeada por inyección muestreada pudo haberse hecho en cualquiera de dos prensas y en cualquiera de las ocho cavidades de cada prensa.

3-13. En el pedido de una computadora puede especificarse memoria de 4, 8 o 12 megabytes y capacidad de almacenamiento en disco duro de 200, 300 o 400 megabytes. Describa el conjunto de pedidos posibles.

3-14. Se hacen llamadas repetidas a una línea telefónica ocupada hasta que se consigue la conexión.

3-15. En un dispositivo de almacenamiento magnético se hacen tres intentos para leer datos antes de que se aplique un procedimiento de recuperación de errores que reposiciona la cabeza magnética. El procedimiento de recuperación de errores intenta tres reposicionamientos antes de enviar un mensaje de "aborto" al operador. Sea que

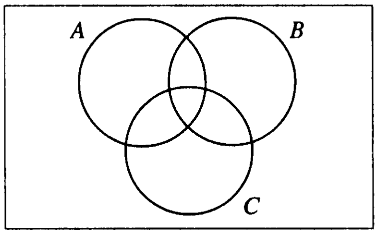


Figura 3-9 Diagrama de Venn para el ejercicio 3-16.

s denote el éxito de una operación de lectura,

f denote el fracaso de una operación de lectura,

F denote el fracaso del procedimiento de recuperación de errores,

S denote el éxito del procedimiento de recuperación de errores, y

A denote un mensaje de aborto enviado al operador.

Describa el espacio muestral de este experimento con un diagrama de árbol.

3-16. En el diagrama de Venn de la figura 3-9 se muestran tres eventos. Copie la figura y sombree la región que corresponda a cada uno de los eventos siguientes:

a) A'
b) $A \cap B$
c) $(A \cap B) \cup C$
d) $(B \cup C)'$
e) $(A \cap B)' \cup C$

3-17. En el diagrama de Venn de la figura 3-10 se muestran tres eventos. Copie la figura y sombree la región que corresponda a cada uno de los eventos siguientes:

a) A'
b) $(A \cap B) \cup (A \cap B')$

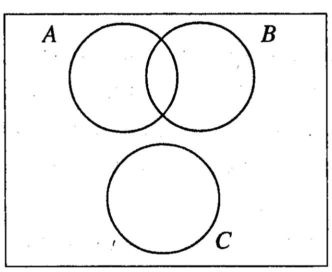


Figura 3-10 Diagrama de Venn para el ejercicio 3-17.

c) $(A \cap B) \cup C$
d) $(B \cup C)'$
e) $(A \cap B)' \cup C$

3-18. Se usa una báscula digital que da los pesos hasta el gramo más próximo.

a) ¿Cuál es el espacio muestral de este experimento?

Sea que

A denote el evento de que un peso exceda los 11 gramos, sea que B denote el evento de que un peso sea menor o igual que 15 gramos y sea que C denote el evento de que un peso sea mayor o igual que 8 gramos y menor que 12 gramos.

Describa los siguientes eventos:

b) $A \cup B$
c) $A \cap B$
d) A'
e) $A \cup B \cup C$
f) $(A \cup C)'$
g) $A \cap B \cap C$
h) $B' \cap C$
i) $A \cup (B \cap C)$

3-19. En una operación de moldeo por inyección se evalúan varias características de cada pieza producida. Sea que

A denote el evento de que una pieza cumple con los requerimientos de contracción del cliente,

B denote el evento de que una pieza cumple con los requerimientos de color del cliente, y

C denote el evento de que una longitud crítica cumple con los requerimientos del cliente.

a) Construya un diagrama de Venn que incluya estos eventos e indique la región del diagrama en la que una pieza cumple con todos los requerimientos del cliente. Sombree las áreas que representen lo siguiente:
b) $B \cap C$
c) $A' \cup B$
d) $A \cup B$
e) Si dos cualesquiera de estos eventos fueran mutuamente excluyentes, ¿qué tanto éxito tendría esta operación de producción?

3-20. Se transmiten cuatro bits en un canal de comunicación digital. Cada bit está distorsionado o se recibe sin distorsión. Sea que A_i denote el evento de que el i-ésimo bit esté distorsionado, $i = 1, \ldots, 4$.

a) Describa el espacio muestral para este experimento.

b) ¿Los eventos A_i' son mutuamente excluyentes?

c) Describa el resultado de cada uno de los eventos siguientes:

A_1

A_1'

$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$

$(A_1 \cap A_2) \cup (A_3 \cap A_4)$

3-21. Se selecciona una muestra de tres calculadoras de una línea de fabricación y cada una de ellas se clasifica como defectuosa o aceptable. Sea que A, B y C denoten los eventos de que la primera, la segunda y la tercera calculadora esté defectuosa, respectivamente.

a) Describa el espacio muestral para este experimento con un diagrama de árbol.

Describa cada uno de los eventos siguientes:

b) A

c) B

d) $A \cap B$

e) $B \cup C$

3-22. Se analizan las placas plásticas circulares de policarbonato de un proveedor para la resistencia a las rayaduras y la resistencia a los impactos. Los resultados de 100 placas circulares se resumen a continuación.

		resistencia a las rayaduras	
		alta	baja
resistencia a	alta	80	9
los impactos	baja	6	5

Sea que A denote el evento de que una placa circular tenga alta resistencia a los impactos y sea que B denote el evento de que una placa circular tenga alta resistencia a las rayaduras. Determine el número de placas circulares en $A \cap B$, A' y $A \cup B$.

3-23. Muestras de una pieza de aluminio forjado se clasifican con base en el acabado de la superficie (en micropulgadas) y en las mediciones de la longitud. Los resultados de 100 piezas se resumen a continuación:

		longitud	
		excelente	buena
acabado de	excelente	75	7
la superficie	bueno	10	8

a) Sea que A denote el evento de que una muestra tiene un acabado de la superficie excelente y sea que B denote el evento de que una muestra tiene una longitud excelente. Determine el número de muestras en $A' \cap B$, B' y $A \cup B$.

b) Suponga que cada una de dos muestras debe clasificarse con base en el acabado de la superficie, excelente o bueno, y en la longitud, excelente o buena. Use un diagrama de árbol para representar los resultados posibles de este experimento.

3-24. Muestras de hule espuma de tres proveedores se clasifican de acuerdo a si cumplen o no con las especificaciones. Los resultados de 100 muestras se resumen a continuación.

		cumple	
		Sí	No
	1	18	2
proveedor	2	17	3
	3	50	10

Sea que A denote el evento de que una muestra es del proveedor 1 y sea que B denote el evento de que una muestra cumple con las especificaciones. Determine el número de muestras en $A' \cap B$, B' y $A \cup B$.

3-25. El tiempo de elevación de un reactor se mide en minutos (y fracciones de minutos). Sea el espacio muestral los números reales positivos. Defina los eventos A y B de la siguiente manera:

$$A = \{x \mid x < 72.5\}$$

y

$$B = \{x \mid x > 52.5\}$$

Describa cada uno de los eventos siguientes:

a) A'

b) B'

c) $A \cap B$

d) $A \cup B$

3-26. El tiempo de elevación de un reactor se mide en minutos (y fracciones de minutos). Sean los números reales positivos el espacio muestral para el tiempo de elevación de una carga. Considere los tiempos de elevación de dos cargas. Sea que A denote el evento de que el tiempo de elevación de ambas cargas sea menor que 72.5 minutos y sea que B denote el evento de que el tiempo de elevación de ambos procesamientos sea mayor que 52.5 minutos.

a) Describa gráficamente el espacio muestral para el tiempo de elevación de dos cargas. Indique cada uno de los eventos siguientes en la gráfica del espacio muestral:

b) A

c) B

d) A'

e) $A \cap B$

f) $A \cup B$

3-2 INTERPRETACIÓN DE LA PROBABILIDAD

3-2.1 Introducción

En este capítulo se introduce la probabilidad únicamente para los espacios muestrales con un conjunto finito (o infinito contable) de resultados. La restricción a estos espacios muestrales permite simplificar los conceptos, así como la presentación sin matemáticas avanzadas.

Definición

Un espacio muestral es **discreto** si contiene un conjunto finito (o contablemente infinito) de resultados.

Con frecuencia resulta conveniente cuantificar la veracidad, o posibilidad, de que ocurrirá un resultado de un experimento aleatorio. "Las posibilidades de que llueva hoy son de 30%" es un enunciado que cuantifica nuestro sentir en cuanto a la posibilidad de que llueva. La veracidad o factibilidad de un resultado se cuantifica asignando un número del intervalo [0, 1] al resultado (o un porcentaje de 0 a 100%). Los números más altos indican que el resultado es más factible que los números más bajos. Un cero indica que un resultado no ocurrirá. Un "uno" indica que un resultado ocurrirá con certeza.

La probabilidad de un resultado puede interpretarse como nuestra probabilidad subjetiva, o **grado de creencia**, de que el resultado ocurrirá. Diferentes individuos no dudarán en asignar probabilidades diferentes a los mismos resultados. Otra interpretación de la probabilidad se basa en el modelo conceptual de repetir en varias ocasiones el experimento aleatorio. La probabilidad de un resultado se interpreta como el valor límite de la proporción de veces que ocurre el resultado en n repeticiones del experimento aleatorio cuando n se incrementa sin restricciones. Por ejemplo, si se asigna la probabilidad 0.2 al resultado de que hay un pulsación viciada en una señal digital, podría interpretarse que esta asignación implicaría que, si se analizan muchas pulsaciones, aproximadamente 20% de las mismas estarán viciadas. Este ejemplo proporciona una interpretación de la probabilidad a través de la **frecuencia relativa**. La proporción, o frecuencia relativa, de las repeticiones del experimento que producen el resultado es 0.2. Las probabilidades se eligen de tal forma que la suma de las probabilidades de todos los resultados de un experimento se acumulen hasta uno. Esta convención facilita la interpretación de la probabilidad como frecuencia relativa. En la figura 3-11 se ilustra el concepto de frecuencia relativa.

Las probabilidades de un experimento aleatorio suelen asignarse con base en un modelo razonable del sistema bajo estudio. Uno de los enfoques es basar la asignación de las probabilidades en el concepto simple de resultados igualmente factibles. Esto se ilustra con el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 3-9

Se seleccionará un diodo láser, *al azar,* de un lote de 100. El espacio muestral es el conjunto de 100 diodos. La expresión "al azar" implica que es razonable suponer que cada diodo del lote tiene una posibilidad igual de ser seleccionado. Como la suma de las probabilidades debe ser igual a uno, el modelo de probabilidad para este experimento asigna la probabilidad de 0.01 a cada uno de los 100 resultados. Puede hacerse una interpretación de la probabilidad imaginando muchas repeticiones del experimento. Cada repetición empieza con los 100 diodos y se selecciona uno al azar. La probabilidad 0.01 asignada a un diodo particular representa la proporción de las repeticiones en las que se selecciona un diodo particular.

Con frecuencia, el resultado siguiente es útil.

Siempre que un espacio muestral conste de N resultados posibles que son igualmente factibles, la probabilidad de cada resultado es $1/N$.

Muchas veces es necesario asignar probabilidades a eventos que se componen de varios resultados de un espacio muestral.

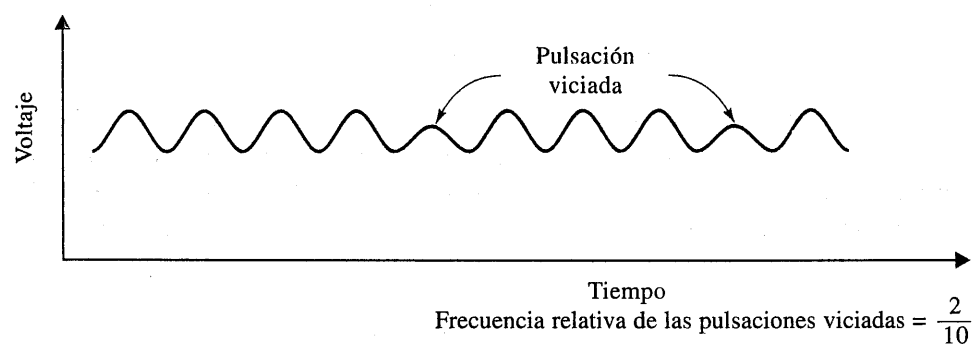


Figura 3-11 Frecuencia relativa de las pulsaciones viciadas enviadas en un canal de comunicación.

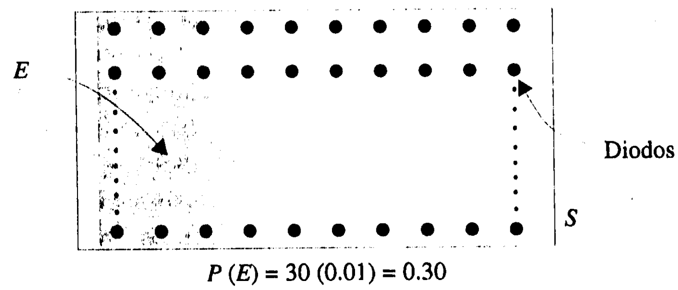


Figura 3-12 La probabilidad del evento E es la suma de las probabilidades de los resultados en E.

EJEMPLO 3-10

Suponga que 30% de los diodos láser de un lote de 100 satisface los requerimientos de energía mínimos de un cliente específico. Si se selecciona un diodo láser al azar, es decir, para cada diodo láser es igualmente posible ser seleccionado, nuestra intuición nos dice que la probabilidad de satisfacer los requerimientos del cliente es 0.30.

Sea E lo que denote el evento de que el diodo seleccionado satisface los requerimientos del cliente. Entonces E es el subconjunto de 30 diodos que satisfacen los requerimientos del cliente. Puesto que E contiene 30 resultados y cada resultado tiene una probabilidad de 0.01, se concluye que la probabilidad de E es 0.3. La conclusión coincide con nuestra intuición. En la figura 3-12 se ilustra este ejemplo.

Para un espacio muestral discreto, la probabilidad de un evento puede definirse mediante el razonamiento usado en el ejemplo anterior. La definición siguiente proporciona un método simple para obtener las probabilidades de eventos en espacios muestrales discretos.

Definición

Para un espacio muestral discreto, la *probabilidad de un evento E*, denotada como $P(E)$, es igual a la suma de las probabilidades de los resultados en E.

EJEMPLO 3-11

Un experimento aleatorio puede producir uno de los resultados $\{a, b, c, d\}$ con probabilidades 0.1, 0.3, 0.5 y 0.1, respectivamente. Sea que A denote el evento $\{a, b\}$, B el evento $\{b, c, d\}$ y C el evento $\{d\}$.

Entonces,

$$P(A) = 0.1 + 0.3 = 0.4$$
$$P(B) = 0.3 + 0.5 + 0.1 = 0.9$$
$$P(C) = 0.1$$

Asimismo, $P(A') = 0.6$, $P(B') = 0.1$ y $P(C') = 0.9$. Además, puesto que $A \cap B = \{b\}$, $P(A \cap B) = 0.3$. Puesto que $A \cup B = \{a, b, c, d\}$, $P(A \cup B) = 0.1 + 0.3 + 0.5 + 0.1 = 1$. Puesto que $A \cap C$ es el conjunto vacío, $P(A \cap C) = 0$.

EJEMPLO 3-12

En la inspección visual de un lugar dado en las obleas de un proceso de fabricación de semiconductores se obtuvo la tabla siguiente:

Numero de partículas de contaminación	**Proporción de obleas**
0	0.40
1	0.20
2	0.15
3	0.10
4	0.05
5 o más	0.10

Si se selecciona una oblea de este proceso al azar y se inspecciona el mismo lugar, ¿cuál es la probabilidad de que no contenga partículas de contaminación? La probabilidad requerida depende exclusivamente del número de partículas de contaminación presentes en el lugar dado de la oblea. Por consiguiente, es lo mismo considerar que el espacio muestral se compone de las seis categorías que resumen el número de partículas de contaminación en una oblea. Entonces, el evento de que no hay partículas en el lugar inspeccionado de la oblea, denotado como E, puede considerarse compuesto por el resultado particular $E = \{0\}$. Por lo tanto,

$$P(E) = 0.4$$

¿Cuál es la probabilidad de que una oblea contenga tres o más partículas en el lugar inspeccionado? Sea que E denote el evento de que una oblea contiene tres o más partículas en el lugar inspeccionado. Entonces, E consta de los tres resultados $\{3, 4, 5 \text{ o más}\}$. Por lo tanto,

$$P(E) = 0.10 + 0.05 + 0.10 = 0.25$$

¿Cuál es la probabilidad de que una oblea contenga 0 o más de tres partículas en el lugar inspeccionado? Sea que E denote el evento de que una oblea contiene 0 o más de tres partículas en el lugar inspeccionado. Entonces, E consta de los tres resultados $\{0, 4, 5 \text{ o más}\}$. Por lo tanto,

$$P(E) = 0.40 + 0.05 + 0.10 = 0.55$$

3-2.2 Axiomas de probabilidad

Ahora que se ha definido la probabilidad de un evento, los supuestos que se han hecho en cuanto a las probabilidades, pueden reunirse en un conjunto de axiomas que deben satisfacer las probabilidades en cualquier experimento aleatorio. Los axiomas aseguran que las probabilidades asignadas en un experimento pueden interpretarse como frecuencias relativas y que las asignaciones son consistentes con la comprensión intuitiva de las relaciones entre las frecuencias relativas. Por ejemplo, si el evento A está contenido en el evento B, entonces se tendrá que $P(A) \leq P(B)$. Los **axiomas no determinan las probabilidades**; las probabilidades se asignan con base en nuestro conocimiento del sistema bajo estudio. Sin embargo, los axiomas permiten calcular con facilidad las probabilidades de algunos eventos a partir del conocimiento de las probabilidades de otros eventos.

Axiomas de probabilidad

La probabilidad es un número que se asigna a cada miembro de una colección de eventos de un experimento aleatorio que satisface las siguientes propiedades. Si S es el espacio muestral y E es cualquier evento en un experimento aleatorio,

1) $P(S) = 1$

2) $0 \leq P(E) \leq 1$

3) Para dos eventos E_1 y E_2 con $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$.

Los axiomas y sus consecuencias se restringen a la asignación de probabilidades en una manera que permite interpretar las probabilidades como frecuencias relativas sin inconsistencias. La propiedad de que $0 \leq P(E) \leq 1$ es equivalente al requerimiento de que una frecuencia relativa debe estar entre cero y uno. La propiedad de que $P(S) = 1$ es una consecuencia del hecho de que un resultado que proviene del espacio muestral ocurre en cada ensayo de un experimento. En consecuencia, la frecuencia relativa de S es uno. La propiedad 3 implica que si los eventos E_1 y E_2 no tienen resultados en común, entonces la frecuencia relativa de los resultados en $E_1 \cup E_2$ es la suma de las frecuencias relativas de los resultados de E_1 y E_2.

Estos axiomas implican los siguientes resultados. Las deducciones se dejan como ejercicios al final de esta sección. Ahora bien,

$$P(\varnothing) = 0$$

y para cualquier evento E,

$$P(E') = 1 - P(E)$$

Si la frecuencia relativa del evento E es 0.4, la interpretación de frecuencia relativa empleada aquí implica que la frecuencia relativa de E' es 0.6. Además, si el evento E_1 está contenido en el evento E_2, entonces

$$P(E_1) \leq P(E_2)$$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 3-2

3-27. Cada uno de los cinco resultados posibles de un experimento aleatorio es igualmente factible. El espacio muestral es $\{a, b, c, d, e\}$. Sea que A denote el evento $\{a, b\}$ y sea que B denote el evento $\{c, d, e\}$. Determine las siguientes probabilidades:

a) $P(A)$
b) $P(B)$
c) $P(A')$
d) $P(A \cup B)$
e) $P(A \cap B)$

3-28. El espacio muestral de un experimento aleatorio es $\{a, b, c, d, e\}$ con probabilidades 0.1, 0.1, 0.2, 0.4 y 0.2, respectivamente. Sea que A denote el evento $\{a, b, c\}$ y sea que B denote el evento $\{c, d, e\}$. Determine las siguientes probabilidades:

a) $P(A)$
b) $P(B)$
c) $P(A')$
d) $P(A \cup B)$
e) $P(A \cap B)$

3-29. Es igualmente factible que una pieza seleccionada para prueba se haya fabricado en cualquiera de seis herramientas cortadoras.

a) ¿Cuál es el espacio muestral?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que la pieza sea de la herramienta 1?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que la pieza sea de la herramienta 3 o de la herramienta 5?
d) ¿Cuál es la probabilidad de que la pieza no sea de la herramienta 4?

3-30. Es igualmente factible que una pieza moldeada por inyección se obtenga de cualquiera de ocho cavidades de un molde.

a) ¿Cuál es el espacio muestral?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que la pieza sea de la cavidad 1 o 2?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que la pieza no sea de la cavidad 3 ni de la 4?

3-31. Un espacio muestral contiene 20 resultados igualmente factibles. Si la probabilidad del evento A es 0.3, ¿cuántos resultados hay en el evento A?

3-32. Se hace el resumen de los pedidos de un aparato de iluminación por los accesorios opcionales que se solicitan:

	proporción de pedidos
sin accesorios opcionales	0.3
con un accesorio optional	0.5
con más de un accesorio opcional	0.2

a) ¿Cuál es la probabilidad de que en un pedido se solicite al menos un accesorio opcional?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que en un pedido no se solicite más de un accesorio opcional?

3-33. Si es igualmente factible que el último dígito de la medición de un peso sea cualquiera de los dígitos del 0 al 9,

a) ¿cuál es la probabilidad de que el último dígito sea cero?, y
b) ¿cuál es la probabilidad de que el último dígito sea mayor o igual que cinco?

3-34. El 25% de los técnicos de un laboratorio hace correctamente una preparación muestral para una medición química; 70% la hace con un error secundario y 5% la hace con un error grave.

a) Si se selecciona aleatoriamente a un técnico para hacer la preparación, ¿cuál es la probabilidad de que la haga sin error?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que la haga con un error secundario o con uno grave?

3-35. Se analizan las placas circulares plásticas de policarbonato de un proveedor para la resistencia a las rayaduras y la resistencia a los impactos. Los resultados de 100 placas circulares se resumen a continuación.

		resistencia a los impactos	
		alta	baja
resistencia a	alta	80	9
las rayaduras	baja	6	5

Sea que A denote el evento de que una placa circular tiene alta resistencia a los impactos y sea que B denote el evento de que una placa circular tiene alta resistencia a las rayaduras. Si se selecciona una placa circular al azar, determine las siguientes probabilidades:

a) $P(A)$
b) $P(B)$
c) $P(A')$
d) $P(A \cap B)$
e) $P(A \cup B)$
f) $P(A' \cup B)$

3-36. Muestras de una pieza de aluminio forjado se clasifican con base en el acabado de la superficie (en micropulgadas) y en las mediciones de la longitud. Los resultados de 100 piezas se resumen a continuación:

		longitud	
		excelente	buena
acabado de	excelente	75	7
la superficie	bueno	10	8

Sea que A denote el evento de que una muestra tiene el terminado de la superficie excelente y sea que B denote el evento de que una muestra tiene una longitud excelente. Si se selecciona una pieza al azar, determine las siguientes probabilidades:

a) $P(A)$
b) $P(B)$
c) $P(A')$
d) $P(A \cap B)$
e) $P(A \cup B)$
f) $P(A' \cup B)$

3-37. Se clasifican muestras de hule espuma de tres proveedores de acuerdo a si cumplen o no con las especificaciones. Los resultados de 100 muestras se resumen a continuación:

		cumple	
		sí	no
	1	18	2
proveedor	2	17	3
	3	50	10

Sea que A denote el evento de que una muestra es del proveedor 1 y sea que B denote el evento de que una muestra cumple con las especificaciones. Si se selecciona una muestra de hule espuma al azar, determine las siguientes probabilidades:

a) $P(A)$
b) $P(B)$
c) $P(A')$
d) $P(A \cap B)$
e) $P(A \cup B)$
f) $P(A' \cup B)$

3-38. Aplique los axiomas de probabilidad para demostrar lo siguiente:

a) Para cualquier evento E, $P(E') = 1 - P(E)$.
b) $P(\varnothing) = 0$.
c) Si A está contenido en B, entonces $P(A) \leq P(B)$.

3-3 REGLAS DE ADICIÓN

Los eventos conjuntos se generan aplicando operaciones básicas de conjuntos a eventos individuales. Las uniones de eventos, tales como $A \cup B$, las intersecciones de eventos, tales como $A \cap B$, y los complementos de eventos, tales como A', suelen ser de interés. La probabilidad de un evento conjunto con frecuencia puede determinarse a partir de las probabilidades de los eventos individuales que lo componen. En ocasiones, las operaciones básicas con conjuntos también resultan útiles para determinar la probabilidad de un evento conjunto.

EJEMPLO 3-13

En la tabla 3-1 se enlista el historial de 940 obleas en un proceso de fabricación de semiconductores. Supóngase que se selecciona una de las obleas de la tabla 3-1 al azar. Sea que A denote el evento de que la oblea contiene niveles altos de contaminación. Entonces,

$$P(A) = 358/940$$

Tabla 3-1 Obleas en un proceso de fabricación de semiconductores

		Centro de la máquina-herramienta de deposición electrónica	
		no	sí
Contaminación	no	514	68
alta	sí	112	246

Sea que B denote el evento de que la oblea se encuentra en el centro de la máquina-herramienta de deposición electrónica. Entonces,

$$P(B) = 314/940$$

Además, $P(A \cap B)$ es la probabilidad de que la oblea sea del centro de la máquina-herramienta de deposición electrónica y contenga niveles altos de contaminación. Por la tabla 3-1,

$$P(A \cap B) = 246/940$$

El evento $A \cup B$ es el evento de que una oblea es del centro de la máquina-herramienta de deposición electrónica o contiene niveles altos de contaminación (o ambos). Por la tabla 3-1, $P(A \cup B) = 426/940$. Un cálculo alternativo de $P(A \cup B)$ puede obtenerse de la siguiente manera: las 246 obleas que componen el evento $A \cap B$ se incluyen una vez en el cálculo de $P(A)$ y una vez más en el cálculo de $P(B)$. Por lo tanto, puede encontrarse que $P(A \cup B)$ es

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= 358/940 + 314/940 - 246/940 \\ &= 426/940 \end{aligned}$$

Sea E el evento de que la oblea no es del centro de la máquina-herramienta de deposición electrónica ni contiene niveles altos de contaminación. Por la tabla 3-1,

$$P(E) = 514/940$$

Como una demostración de las operaciones con conjuntos, puede emplearse un cálculo alternativo para determinar $P(E)$. Se tiene que

$$E = (A \cup B)'$$

Por lo tanto,

$$P(E) = 1 - P(A \cup B) = 514/940$$

El ejemplo anterior motiva el siguiente resultado general:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (3\text{-}1)$$

EJEMPLO 3-14

Obleas como las descritas en el ejemplo 3-13 se clasificaron adicionalmente según estuvieran en el "centro" o en el "borde" de la máquina-herramienta de deposición electrónica que se empleó en su fabricación y por el grado de contaminación. En la tabla 3-2 se muestra la proporción de obleas en cada categoría. ¿Cuál es la probabilidad de que una oblea seleccionada al azar de este lote estuviera en el centro de la máquina-herramienta de deposición electrónica? Como 0.72 de las obleas están cerca del centro, la probabilidad es 0.72.

¿Cuál es la probabilidad de que una oblea contenga cuatro o más partículas y que estuviera en el borde? Sea que E_1 denote el evento de que una oblea contiene cuatro o más partículas y sea que E_2 denote el evento de que una oblea está en el borde. La probabilidad pedida es $P(E_1 \cap E_2)$. La proporción de obleas que contienen cuatro o más partículas y que están en el borde es 0.01 + 0.03. La probabilidad pedida es 0.04.

¿Cuál es la probabilidad de que una oblea estuvo en el borde o que contenga cuatro o más partículas? Usando las definiciones de la pregunta anterior, se encuentra que la probabilidad pedida es $P(E_1 \cup E_2)$. Ahora bien, $P(E_1) = 0.15$ y $P(E_2) = 0.28$. Por la pregunta anterior, $P(E_1 \cap E_2) = 0.04$. Por lo tanto, aplicando la ecuación 3-1, se encuentra que

$$P(E_1 \cup E_2) = 0.15 + 0.28 - 0.04 = 0.39$$

¿Cuál es la probabilidad de que una oblea contenga menos de dos partículas o que sea a la vez del borde y contenga más de cuatro partículas? Sea que E_1 denote el evento de que una oblea contiene menos de dos partículas y sea que E_2 denote el evento de que una oblea es a la vez del borde y contiene más de cuatro partículas. La probabilidad pedida es $P(E_1 \cup E_2)$. Ahora bien, $P(E_1) = 0.60$ y $P(E_2) = 0.03$. Además, E_1 y E_2 son mutuamente excluyentes. Por consiguiente, no hay obleas en la intersección y $P(E_1 \cap E_2) = 0$. Por lo tanto,

$$P(E_1 \cup E_2) = 0.60 + 0.03 = 0.63$$

Tabla 3-2 Obleas clasificadas por contaminación y localización

Número de partículas de contaminación	Centro	Borde	Totales
0	0.30	0.10	0.40
1	0.15	0.05	0.20
2	0.10	0.05	0.15
3	0.06	0.04	0.10
4	0.04	0.01	0.05
5 o más	0.07	0.03	0.10
Totales	0.72	0.28	1.00

Recuérdese que se dice que dos eventos A y B son mutuamente excluyentes si $A \cap B = \varnothing$. Entonces, $P(A \cap B) = 0$, y el resultado general para la probabilidad de $A \cup B$ se reduce al tercer axioma de probabilidad.

Si A y B son eventos mutuamente excluyentes, entonces

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \tag{3-2}$$

Tres o más eventos

Probabilidades más complicadas, tales como $P(A \cup B \cup C)$, pueden determinarse aplicando varias veces la ecuación 3-1 y utilizando algunas de las operaciones básicas con conjuntos. Por ejemplo,

$$P(A \cup B \cup C) = P[(A \cup B) \cup C)] = P(A \cup B) + P(C) - P[(A \cup B) \cap C]$$

Al desarrollar $P(A \cup B)$ por la ecuación 3-1 y aplicar la regla distributiva para operaciones con conjuntos a fin de simplificar $P[(A \cup B) \cap C]$, se obtiene

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) \\ &\quad - P[(A \cap C) \cup (B \cap C)] \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) \\ &\quad - [P(A \cap B) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)] \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) \\ &\quad - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

Se ha desarrollado una fórmula para la probabilidad de la unión de tres eventos. Es posible desarrollar una fórmula para la probabilidad de la unión de cualquier número de eventos, aunque las fórmulas se hacen bastante complejas. Como resumen, para el caso de tres eventos,

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) - P(C) \\ &\quad - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \end{aligned} \tag{3-3}$$

En general, se dice que los eventos de una colección $E_1, E_2, \ldots, E_k$, son mutuamente excluyentes si no hay traslape entre cualquiera de ellos.

Definición

Se dice que los eventos de una colección $E_1, E_2, \ldots, E_k$ son **mutuamente excluyentes** si para todos los pares,

$$E_i \cap E_j = \varnothing$$

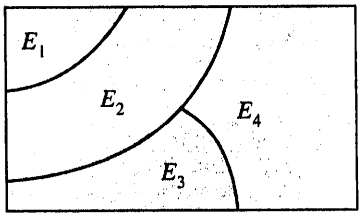


Figura 3-13 Diagrama de Venn de cuatro eventos mutuamente excluyentes.

En la figura 3-13 se muestra el diagrama de Venn de varios eventos mutuamente excluyentes. Al generalizar el razonamiento para la unión de dos eventos se puede llegar al siguiente resultado:

Para una colección de eventos mutuamente excluyentes,

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_k) = P(E_1) + P(E_2) + \ldots\ P(E_k) \tag{3-4}$$

EJEMPLO 3-15

En una operación de maquinado, sea que x denote la longitud de una pieza y supóngase que para

10% de las piezas, $x \leq 7.55$ milímetros.

15% de las piezas, $7.55 < x \leq 7.57$ milímetros.

25% de las piezas, $7.57 < x \leq 7.59$ milímetros.

Si se selecciona una pieza de esta operación, ¿cuál es la probabilidad de que sea menor o igual que 7.59 milímetros? Sea que E_1 denote el evento de que $x \leq 7.55$ milímetros de longitud. Sea que E_2 denote el evento de que $7.55 < x \leq 7.57$ milímetros. Sea que E_3 denote el evento de que $7.57 < x \leq 7.59$ milímetros. Entonces, puesto que estos eventos son mutuamente excluyentes,

$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = 0.10 + 0.15 + 0.25 = 0.50$$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 3-3

3-39. Si $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.2$ y $P(A \cap B) = 0.1$, determine las siguientes probabilidades:

a) $P(A')$
b) $P(A \cup B)$
c) $P(A' \cap B)$
d) $P(A \cap B')$
e) $P[(A \cup B)']$
f) $P(A' \cup B)$

3-40. Si A, B y C son eventos mutuamente excluyentes con $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.3$ y $P(C) = 0.4$, determine las siguientes probabilidades:

a) $P(A \cup B \cup C)$
b) $P(A \cap B \cap C)$
c) $P(A \cap B)$
d) $P[(A \cup B) \cap C]$

3-41. Si A, B y C son eventos mutuamente excluyentes, ¿es posible que $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.4$ y $P(C) = 0.5$? ¿Por qué sí o por qué no?

3-42. Se analizan las placas circulares plásticas de policarbonato de un proveedor para la resistencia a las rayaduras y la resistencia a los impactos. Los resultados de 100 placas circulares se resumen a continuación:

		resistencia a los impactos	
		alta	baja
resistencia a las rayaduras	alta	80	9
	baja	6	5

a) Si se selecciona una placa circular al azar, ¿cuál es la probabilidad de que su resistencia a las rayaduras sea alta y su resistencia a los impactos sea alta?

b) Si se selecciona una placa circular al azar, ¿cuál es la probabilidad de que su resistencia a las rayaduras sea alta o su resistencia a los impactos sea alta?

c) Considérese el evento de que una placa circular tiene alta resistencia a las rayaduras y el evento de que una placa circular tiene alta resistencia a los impactos. ¿Estos dos eventos son mutuamente excluyentes?

3-43. El análisis de las flechas para un compresor se resumen por su cumplimiento con las especificaciones:

		la redondez cumple	
		sí	no
el acabado de la superficie cumple	sí	345	5
	no	12	8

a) Si se selecciona una flecha al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la flecha cumpla con los requerimientos del acabado de la superficie?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la flecha seleccionada cumpla con los requerimientos del acabado de la superficie o con los requerimientos de redondez?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que la flecha seleccionada cumpla con los requerimientos del acabado de la superficie o bien de que no cumpla con los requerimientos de redondez?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que la flecha seleccionada cumpla tanto con los requerimientos del acabado de la superficie como con los requerimientos de redondez?

3-44. Las flechas del ejercicio 3-43 se clasifican adicionalmente en términos de la máquina-herramienta que se usó para fabricarlas.

Herramienta 1

		la redondez cumple	
		sí	no
el acabado de la superficie cumple	sí	200	1
	no	4	2

Herramienta 2

		la redondez cumple	
		sí	no
el acabado de la superficie cumple	sí	145	4
	no	8	6

a) Si se selecciona una flecha al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la flecha cumpla con los requerimientos del acabado de la superficie o con los requerimientos de redondez, o sea, de la máquina-herramienta 1?

b) Si se selecciona una flecha al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la flecha cumpla con los requerimientos del acabado de la superficie o no cumpla con los requerimientos de redondez, o sea, de la máquina-herramienta 2?

c) Si se selecciona una flecha al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la flecha cumpla tanto con los requerimientos del acabado de la superficie como con los de redondez, o que la flecha sea de la máquina-herramienta 2?

d) Si se selecciona una flecha al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la flecha cumpla con los requerimientos del acabado de la superficie, o que la flecha sea de la máquina-herramienta 2?

3-4 PROBABILIDAD CONDICIONAL

Los siguientes ejemplos ilustran la necesidad de reevaluar las probabilidades cuando se dispone de información adicional.

Un canal de comunicación digital tiene un índice de error de un bit por cada mil bits transmitidos. Los errores son raros, pero cuando ocurren tienden a hacerlo en rachas que afectan varios bits consecutivos. Si se transmite un solo bit, un modelo de la probabilidad de un error sería 1/1 000. Sin embargo, si el bit previo tuvo un error, debido a una racha, podría conjeturarse que la probabilidad de que el siguiente bit tenga un error es mayor que 1/1 000.

En el proceso de fabricación de una película delgada, la proporción de partes que no son aceptables es 2%. Sin embargo, el proceso es sensible a problemas de contaminación que pueden aumentar el porcentaje de partes que no son aceptables. Si se sabe que durante un turno dado hubo problemas con los filtros empleados para controlar la contaminación, la probabilidad de que una parte sea inaceptable se tasaría en un valor mayor que 2%.

EJEMPLO 3-16

En un proceso de fabricación, 10% de las piezas presentan imperfecciones superficiales visibles y 25% de las piezas con imperfecciones superficiales son funcionalmente defectuosas. Sin embargo, sólo 5% de las piezas sin imperfecciones superficiales son funcionalmente defectuosas. La probabilidad de una pieza con un defecto funcional depende del conocimiento de la presencia o ausencia de una imperfección superficial. Si una pieza tiene una imperfección superficial, la probabilidad de que sea funcionalmente defectuosa es 0.25. Si una pieza no tiene ninguna imperfección superficial, la probabilidad de que sea funcionalmente defectuosa es 0.05.

Continuando con la discusión del ejemplo anterior, sea que D denote el evento de que una pieza es funcionalmente defectuosa y sea que F denote el evento de que una pieza tiene una imperfección superficial. Entonces, la probabilidad de D dado que, o suponiendo que una pieza tiene una imperfección superficial, se denota como $P(D \mid F)$. Esta notación se lee como la **probabilidad condicional** de D dado F y se interpreta como la probabilidad de que una pieza sea funcionalmente defectuosa, dado que la pieza tiene una imperfección superficial. Como 25% de las piezas con imperfecciones superficiales son funcionalmente defectuosas, la conclusión puede enunciarse como $P(D \mid F) = 0.25$. Además, puesto que F' denota el evento de que una pieza no tiene una imperfección superficial, y ya que 5% de las piezas sin imperfecciones superficiales son funcionalmente defectuosas, se tiene que $P(D \mid F') = 0.05$. Estos resultados se muestran gráficamente en la figura 3-14.

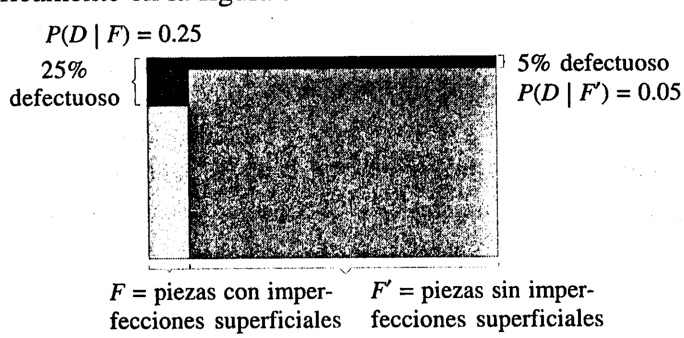


Figura 3-14 Probabilidades condicionales para las piezas con imperfecciones superficiales.

En algunos modelos, $P(B \mid A)$ pueden calcularse directamente de la descripción del experimento aleatorio.

EJEMPLO 3-17

La producción de un día de 850 partes manufacturadas contiene 50 partes que no satisfacen los requerimientos del cliente. Se seleccionan dos partes *al azar,* sin reemplazos, del lote. La expresión "al azar" implica que, cuando se selecciona la primera parte, todas las partes son igualmente factibles, y cuando se selecciona la segunda, todas las partes restantes son igualmente factibles.

¿Cuál es la probabilidad de que la segunda parte sea defectuosa dado que la primera es defectuosa? Sea que A denote el evento de que la primera parte seleccionada es defectuosa y sea que B denote el evento de que la segunda parte seleccionada es defectuosa. La probabilidad que se pide puede expresarse como $P(B \mid A)$.

Si la primera parte es defectuosa, entonces antes de seleccionar la segunda parte el lote contiene 849 partes, de las cuales 49 son defectuosas. Por lo tanto,

$$P(B \mid A) = 49/849$$

EJEMPLO 3-18

Continuando con el ejemplo anterior, si se seleccionan tres partes al azar, ¿cuál es la probabilidad de que las dos primeras sean defectuosas y la tercera no lo sea? Este evento puede describirse en notación abreviada, simplemente como $P(ddn)$. Se tiene

$$P(ddn) = \frac{50}{850} \cdot \frac{49}{849} \cdot \frac{800}{848} = 0.0032$$

El tercer término se obtiene de la siguiente manera: después de seleccionar las dos primeras partes, quedan 848; de las partes que quedan, 800 no son defectuosas. En este ejemplo, es fácil obtener la solución interpretando la probabilidad condicional.

Como lo ilustran los ejemplos anteriores, con frecuencia la estimación de la probabilidad de un evento se actualiza como resultado de la información adicional. Las probabilidades condicionales pueden encontrarse a partir de la definición formal de probabilidad condicional.

Definición

La **probabilidad condicional** de un evento B dado un evento A, denotada como $P(B \mid A)$, es

$$P(B \mid A) = P(A \cap B) / P(A) \tag{3-5}$$

para $P(A) > 0$.

Esta definición puede entenderse en el caso especial en que todos los resultados de un experimento aleatorio son igualmente factibles. Si hay n resultados totales, entonces

$$P(A) = (\text{número de resultados en } A)/n$$

Además,

$$P(A \cap B) = (\text{número de resultados en } A \cap B)/n$$

Por consiguiente,

$$P(A \cap B)/P(A) = (\text{número de resultados en } A \cap B)/(\text{número de resultados en } A)$$

Por lo tanto, $P(B \mid A)$ puede interpretarse como la frecuencia relativa del evento B entre los ensayos que producen un resultado en el evento A.

EJEMPLO 3-19

El registro de 266 muestras de aire se ha clasificado con base en la presencia de dos moléculas raras. Sea que A denote el evento que consta de todas las muestras de aire en las que está presente la molécula rara 1 y sea que B denote el evento que consta de todas las muestras de aire en las que está presente la molécula 2. Utilizando los resultados de la tabla 3-3, se encuentra que

$$\begin{aligned}
&\text{P(molécula 2 presente} \mid \text{molécula 1 presente)} \\
&= P(B \mid A) \\
&= P(A \cap B)/P(A) \\
&= \frac{12}{266} \div \frac{36}{266} = 12/36
\end{aligned}$$

Obsérvese que en este ejemplo las cuatro probabilidades siguientes son diferentes:

$$P(A) = 36/266, \qquad P(A \mid B) = 12/30$$

$$P(B) = 30/266, \qquad P(A \mid B) = 12/36$$

Aquí, $P(A)$ y $P(A \mid B)$ son las probabilidades del mismo evento, pero se calculan bajo dos condiciones de conocimiento diferentes. De manera similar, $P(B)$ y $P(B \mid A)$ son las probabilidades del mismo evento, pero calculadas bajo dos condiciones de conocimiento diferentes.

Resultados similares se muestran en el diagrama de árbol de la figura 3-15.

Tabla 3-3 Moléculas en muestras de aire

		Molécula 1 presente		
		no	sí	
Molécula 2 presente	no	212	24	236
	sí	18	12	30
		230	36	266

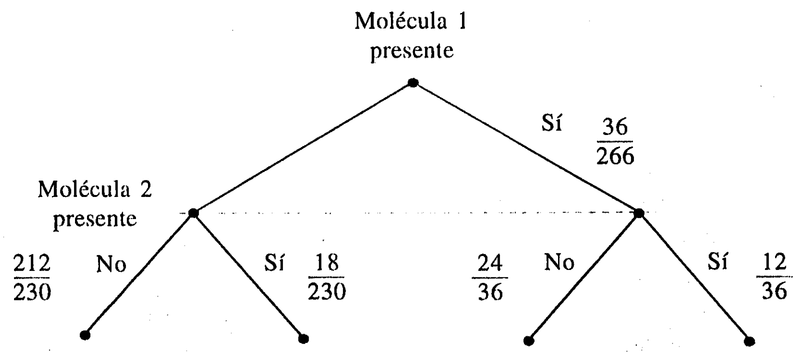


Figura 3-15 Diagrama de árbol para las moléculas en las muestras de aire.

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 3-4

3-45. Se analizan las placas circulares plásticas de policarbonato de un proveedor para la resistencia a las rayaduras y la resistencia a los impactos. Los resultados de 100 placas circulares se resumen a continuación.

		resistencia a los impactos	
		alta	baja
resistencia a las rayaduras	alta	80	9
	baja	6	5

Sea que A denote el evento de que una placa circular tiene alta resistencia a los impactos y sea que B denote el evento de que una placa circular tiene alta resistencia a las rayaduras. Determine las siguientes probabilidades:

a) $P(A)$
b) $P(B)$
c) $P(A \mid B)$
d) $P(B \mid A)$

3-46. Se clasifican muestras de aluminio fundido con base en el acabado de la superficie (en micropulgadas) y las mediciones de la longitud. Los resultados de 100 piezas se resumen a continuación:

		longitud	
		excelente	buena
acabado de la superficie	excelente	75	7
	bueno	10	8

Sea que A denote el evento de que una muestra tiene acabado de la superficie excelente y sea que B denote el evento de que una muestra tenga una longitud excelente. Determine:

a) $P(A)$
b) $P(B)$
c) $P(A \mid B)$
d) $P(B \mid A)$
e) Si la pieza seleccionada tiene acabado de la superficie excelente, ¿cuál es la probabilidad de que la longitud sea excelente?
f) Si la pieza seleccionada tiene buena longitud, ¿cuál es la probabilidad de que el acabado de la superficie sea excelente?

3-47. El análisis de las flechas para un compresor se resumen por su cumplimiento con las especificaciones:

		la redondez cumple	
		sí	no
el acabado de la superficie cumple	sí	345	5
	no	12	8

a) Si se sabe que una flecha cumple con los requerimientos de redondez, ¿cuál es la probabilidad de que cumpla con los requerimientos del acabado de la superficie?
b) Si se sabe que una flecha no cumple con los requerimientos de redondez, ¿cuál es la probabilidad de que cumpla con los requerimientos del acabado de la superficie?

3-48. En la tabla siguiente se resume el análisis de muestras de acero galvanizado, por el peso del recubrimiento y la rugosidad de la superficie.

		peso del recubrimiento	
		alto	bajo
rugosidad de la superficie	alta	12	16
	baja	88	34

a) Si el peso del recubrimiento de una muestra es alto, ¿cuál es la probabilidad de que la rugosidad de la superficie sea alta?
b) Si la rugosidad de la superficie de una muestra es alta, ¿cuál es la probabilidad de que el peso del recubrimiento sea alto?
c) Si la rugosidad de la superficie de una muestra es baja, ¿cuál es la probabilidad de que el peso del recubrimiento sea bajo?

3-49. Considere los datos sobre la contaminación de las obleas y la localización en la máquina-herramienta de deposición electrónica presentados en el ejemplo 3-14. Suponga que se selecciona una oblea al azar de este conjunto. Sea que A denote el evento de que una oblea contiene cuatro o más partículas y sea que B denote el evento de que es del centro de la máquina-herramienta de deposición electrónica. Determine:
a) $P(A)$
b) $P(A \mid B)$
c) $P(B)$
d) $P(B \mid A)$
e) $P(A \cap B)$
f) $P(A \cup B)$

3-50. Un lote de 100 chips semiconductores contiene 20 que están defectuosos. Se seleccionan dos chips del lote, al azar, sin reemplazo.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que el primero que se seleccione esté defectuoso?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que el segundo que se seleccione esté defectuoso, dado que el primero estuvo defectuoso?
c) ¿Cómo cambia la respuesta del inciso b) si los chips seleccionados se reemplazaron antes de la siguiente selección?

3-51. Un lote contiene 15 piezas fundidas de un proveedor local y 25 piezas fundidas de un proveedor del estado contiguo. Se seleccionandos piezas fundidas al azar, sin reemplazo, del lote de 40. Sea que A denote el evento de que la primera pieza fundida seleccionada es del proveedor local y sea que B denote el evento de que la segunda pieza fundida seleccionada es del proveedor local. Determine:
a) $P(A)$
b) $P(B \mid A)$
c) $P(A \cap B)$
d) $P(A \cup B)$

Continuación del ejercicio 3-51. Suponga que se seleccionan tres piezas fundidas al azar, sin reemplazo, del lote de 40. Además de las definiciones de los eventos A y B, sea que C denote el evento de que la tercera pieza fundida seleccionada es del proveedor local. Determine:
e) $P(A \cap B \cap C)$
f) $P(A \cap B \cap C')$

3-52. Un lote de 500 contenedores de jugo de naranja congelado contiene 5 que están defectuosos. Del lote se seleccionan dos, al azar y sin reemplazo. Determine:
a) ¿Cuál es la probabilidad de que el segundo contenedor seleccionado esté defectuoso, dado que el primero estuvo defectuoso?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que ambos estén defectuosos?
c) ¿Cuál es la probabilidad que ambos sean aceptables?

3-53. Continuación del ejercicio 3-52. Del lote se seleccionan tres contenedores, al azar y sin reemplazo.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que el tercer contenedor seleccionado esté defectuoso, dado que el primero y el segundo seleccionados estuvieron defectuosos?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que el tercer contenedor seleccionado esté defectuoso, dado que el primer seleccionado estuvo defectuoso y el segundo seleccionado fue aceptable?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que los tres estén defectuosos?

3-54. Si $P(A \mid B) = 1$, ¿se cumple que $A = B$? Trace un diagrama de Venn para explicar la respuesta.

3-55. Suponga que A y B son eventos mutuamente excluyentes. Construya un diagrama de Venn que contenga los tres eventos A, B y C, tales que $P(A \mid C) = 1$ y $P(B \mid C) = 0$.

3-5 REGLAS DE MULTIPLICACIÓN Y DE PROBABILIDAD TOTAL

3-5.1 Regla de multiplicación

La definición de probabilidad condicional de la ecuación 3-5 puede reescribirse para proporcionar una expresión general de la probabilidad de la intersección de dos eventos.

Regla de multiplicación

$$P(A \cap B) = P(A \mid B)P(B) = P(B \mid A)P(A) \tag{3-6}$$

Las expresiones de la ecuación 3-6 se obtienen intercambiando A y B.

EJEMPLO 3-20

La probabilidad de que la batería de un automóvil sometida a alta temperatura en el compartimiento del motor tenga una corriente de carga baja es 0.7. La probabilidad de que la batería esté sometida a alta temperatura en el compartimiento del motor es 0.05.

Sea que A denote el evento de que una batería tiene una corriente de carga baja y sea que B denote el evento de que una batería está sometida a alta temperatura en el compartimiento del motor. La probabilidad de que una batería tenga una corriente de carga baja y esté sometida a alta temperatura en el compartimiento del motor es

$$P(A \cap B) = P(A \mid B)P(B) = 0.7 \times 0.05 = 0.035$$

3-5.2 Regla de probabilidad total

La regla de multiplicación es útil para determinar la probabilidad de un evento que depende de otros eventos. Por ejemplo, supóngase que en la fabricación de semiconductores, la probabilidad de que un chip que está sujeto a niveles de contaminación altos durante la fabricación, ocasione la falla de un producto es de 0.10. La probabilidad de que un chip que no está sujeto a niveles de contaminación altos durante la fabricación ocasione una falla en el producto es 0.005. En una corrida particular de producción, 20% de los chips están sujetos a niveles de contaminación altos. ¿Cuál es la probabilidad de que falle un producto que utilice uno de estos chips?

Evidentemente, la probabilidad requerida depende de si el chip estuvo expuesto o no a niveles de contaminación altos. Este problema puede resolverse mediante el razonamiento siguiente.

Para un evento B cualquiera, B puede expresarse como la unión de la parte de B que está en A y la parte de B que está en A'. Es decir,

$$B = (A \cap B) \cup (A' \cap B)$$

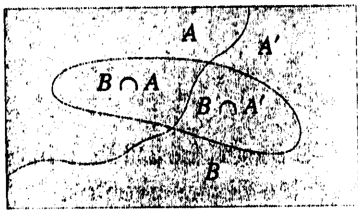


Figura 3-16 Partición de un evento en dos subconjuntos mutuamente excluyentes.

Este resultado se ilustra en el diagrama de Venn de la figura 3-16. Puesto que A y A' son mutuamente excluyentes, $A \cap B$ y $A' \cap B$ son mutuamente excluyentes. Por lo tanto, al utilizar el resultado para la probabilidad de la unión de eventos mutuamente excluyentes de la ecuación 3-2 y la regla de multiplicación de la ecuación 3-6, se obtiene la siguiente regla:

Regla de probabilidad total (para dos eventos)

Para cualesquiera eventos A y B,

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A') = P(B \mid A)P(A) + P(B \mid A')P(A') \quad (3\text{-}7)$$

EJEMPLO 3-21

Considérese el tema de la contaminación del principio de esta sección. Sea que F denote el evento de que el producto falla y sea que A denote el evento de que el chip está expuesto a un nivel de contaminación alto. La probabilidad requerida es $P(F)$ y la información proporcionada puede representarse como

$$P(F \mid A) = 0.10$$
$$P(F \mid A') = 0.005$$
$$P(A) = 0.20$$

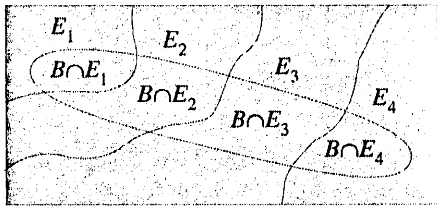
Por lo tanto,

$$P(A') = 0.80$$

al utilizar la ecuación 3-7, se obtiene

$$P(F) = 0.10(0.20) + 0.005(0.80) = 0.024$$

que puede interpretarse como el promedio ponderado de las dos probabilidades de falla.



$B = (B \cap E_1) \cup (B \cap E_2) \cup (B \cap E_3) \cup (B \cap E_4)$

$P(B) = P(B \cap E_1) + P(B \cap E_2) + P(B \cap E_3) + P(B \cap E_4)$

Figura 3-17 Partición de un evento en varios subconjuntos mutuamente excluyentes.

El razonamiento empleado para desarrollar la ecuación 3-7 puede aplicarse de manera más general. En el desarrollo de la ecuación 3-7 sólo se usaron los dos eventos mutuamente excluyentes A y A'. Sin embargo, el hecho de que $A \cup A' = S$, el espacio muestral completo, fue importante. En general, se dice que una colección de conjuntos $E_1, E_2, ..., E_k$ tales que $E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_k = S$ es **exhaustiva**. En la figura 3-17 se presenta una ilustración gráfica de la partición de un evento B entre una colección de eventos mutuamente excluyentes y exhaustivos.

Regla de probabilidad total (para eventos múltiples)

Suponga que $E_1, E_2, ..., E_k$ son k conjuntos mutuamente excluyentes y exhaustivos. Entonces,

$$P(B) = P(B \cap E_1) + P(B \cap E_2) + \ldots + P(B \cap E_k)$$
$$= P(B \mid E_1)\, P(E_1) + P(B \mid E_2)\, P(E_2) + \ldots + P(B \mid E_k)\, P(E_k) \tag{3-8}$$

EJEMPLO 3-22

Continuando con el ejemplo de la fabricación de semiconductores, suponga que la probabilidad de que un chip sujeto a niveles de contaminación altos durante la fabricación, ocasione la falla de un producto, es 0.10;

la probabilidad de que un chip sujeto a niveles de contaminación medios durante la fabricación, ocasione la falla de un producto, es 0.01, y

la probabilidad de que un chip sujeto a niveles de contaminación bajos durante la fabricación ocasione la falla de un producto es 0.001.

En una corrida particular de producción, 20% de los chips están sujetos a niveles de contaminación altos, 30% a niveles de contaminación medios y 50% a niveles de contaminación bajos. ¿Cuál es la probabilidad de que un producto que use uno de estos chips falle? Sea que

H denote el evento de que un chip está expuesto a niveles de contaminación altos

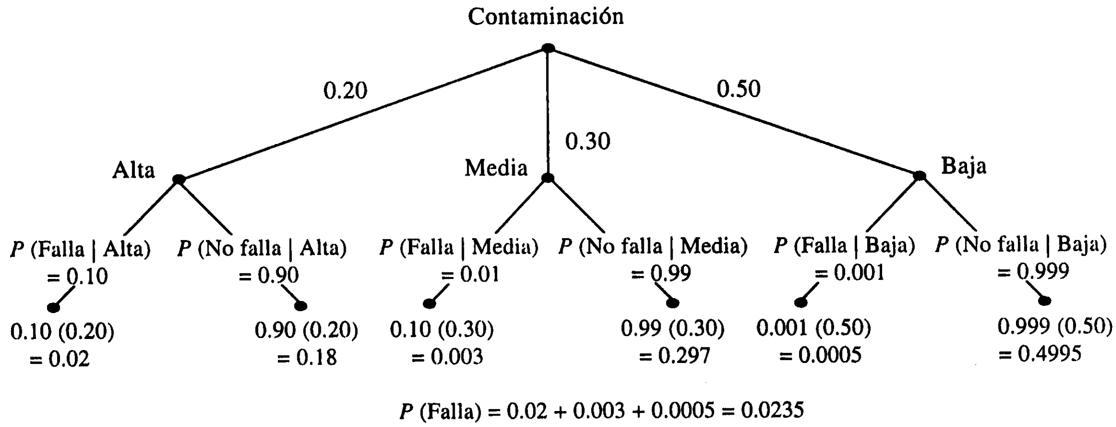


Figura 3-18 Diagrama de árbol para el ejemplo 3-22.

M denote el evento de que un chip está expuesto a niveles de contaminación medios

L denote el evento de que un chip está expuesto a niveles de contaminación bajos

Entonces,

$$\begin{aligned} P(F) &= P(F \mid H)P(H) + P(F \mid M)P(M) + P(F \mid L)P(L) \\ &= 0.10(0.20) + 0.01(0.30) + 0.001(0.50) \\ &= 0.0235 \end{aligned}$$

Este problema también se resuelve convenientemente utilizando el diagrama de árbol de la figura 3-18.

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 3-5

3-56. Suponga que $P(A \mid B) = 0.4$ y que $P(B) = 0.5$. Determine las siguientes probabilidades:
a) $P(A \cap B)$
b) $P(A' \cap B)$

3-57. Suponga que $P(A \mid B) = 0.2$, que $P(A \mid B') = 0.3$ y que $P(B) = 0.8$. ¿Cuál es $P(A)$?

3-58. La probabilidad de que un conector eléctrico que se mantenga seco falle durante el periodo de garantía de una computadora portátil es 1%. Si el conector siempre está húmedo, la probabilidad de una falla durante el periodo de garantía es 5%. Si 90% de los conectores se mantienen secos y 10% están húmedos, ¿qué proporción de conectores fallará durante el periodo de garantía?

3-59. Suponga que 2% de los rollos de tela de algodón y 3% de los rollos de tela de nylon contienen defectos. De los rollos usados por un fabricante, 70% son de algodón y 30% son de nylon. ¿Cuál es la probabilidad de que uno de los rollos usados por el fabricante seleccionado al azar contenga defectos?

3-60. En la fabricación de un adhesivo químico, 3% de todas las corridas de producción tienen materias primas de dos lotes diferentes. Esto ocurre cuando se rellenan los tanques de almacenamiento y la porción restante de un lote es insuficiente para llenar los tanques.

Sólo 5% de las corridas con materias primas de un solo lote requieren reprocesamiento. Sin embargo, es más difícil controlar la viscosidad de las corridas en que se usan dos o más lotes de materia prima, y 40% de las mismas requieren procesamiento adicional a fin de conseguir la viscosidad requerida.

Sea que A denote el evento de que una carga de producción está constituida por dos lotes diferentes y sea que B denote el evento de que un lote requiere procesamiento adicional. Determine las siguientes probabilidades:

a) $P(A)$
b) $P(A')$
c) $P(B \mid A)$
d) $P(B \mid A')$
e) $P(A \cap B)$
f) $P(A \cap B')$
g) $P(B)$

3-61. La rugosidad en los bordes de los productos de papel cortado aumenta con el desgaste de las cuchillas. Sólo 1% de los productos cortados con cuchillas nuevas tiene bordes rugosos, 3% de los productos cortados con cuchillas con filo promedio presentan rugosidad y 5% de los productos cortados con cuchillas desgastadas presentan rugosidad. Si 25% de las cuchillas utilizadas son nuevas, 60% tienen filo promedio y 15% están desgastadas, ¿cuál es la proporción de productos que presenta rugosidad en los bordes?

3-62. Muestras de cristal para laboratorio se colocan en paquetes pequeños y ligeros o en paquetes grandes y pesados. Suponga que 2% y 1% de las muestras enviadas en paquetes pequeños y grandes, respectivamente, se rompen durante la transportación. Si 60% de las muestras se envían en paquetes grandes y 40% se envían en paquetes pequeños, ¿qué proporción de las muestras se rompe durante la transportación?

3-63. Un lote de 25 piezas moldeadas por inyección contiene cinco que presentan una contracción excesiva.

a) Si se seleccionan dos piezas al azar, y sin reemplazo, ¿cuál es la probabilidad de que la segunda pieza seleccionada sea una con contracción excesiva?
b) Si se seleccionan tres piezas al azar, y sin reemplazo, ¿cuál es la probabilidad de que la tercera pieza seleccionada sea una con contracción excesiva?

3-64. Un lote de 100 chips semiconductores contiene 20 que están defectuosos.

a) Se seleccionan dos chips, al azar y sin reemplazo, del lote. Use la regla de probabilidad total para determinar la probabilidad de que el segundo chip seleccionado esté defectuoso.
b) Se seleccionan tres chips, al azar, y sin reemplazo, del lote. Use la regla de probabilidad total para determinar la probabilidad de que el tercer chip seleccionado esté defectuoso.

3-6 INDEPENDENCIA

En algunos casos, la probabilidad condicional $P(B \mid A)$ podría ser igual a $P(B)$. En este caso especial, el hecho de saber que el resultado del experimento está en el evento A no afecta la probabilidad de que el resultado esté en el evento B.

EJEMPLO 3-23

Suponga que la producción de un día de 850 partes manufacturadas contiene 50 partes que no cumplen con los requerimientos del cliente. Suponga además que se seleccionan dos partes del lote, pero la primera parte se reemplaza antes de seleccionar la segunda.

¿Cuál es la probabilidad de que la segunda parte esté defectuosa, dado que la primera parte está defectuosa? Sea que B denote el evento de que la segunda parte seleccionada está defectuosa y sea que A denote el evento de que la primera parte seleccionada está defectuosa. La probabilidad pedida puede expresarse como $P(B \mid A)$.

Puesto que la primera parte se reemplaza, antes de seleccionar la segunda parte el lote sigue conteniendo 850 partes, de las cuales 50 están defectuosas. Por lo tanto, la probabilidad de B no depende de si la primera parte estuvo o no defectuosa. Es decir,

$$P(B \mid A) = 50/850$$

EJEMPLO 3-24

En la tabla 3-4 se describe el registro de 84 muestras de aire con base en la presencia de dos moléculas raras.

Sea que A denote el evento que consta de todas las muestras de aire en las que está presente la molécula 1 y sea que B denote el evento que consta de todas las muestras de aire en las que está presente la molécula 2. Entonces, $P(B) = 28/84 = 1/3$. Además,

$$P(B \mid A) = P(B \cap A)/P(A) = (12/84)(36/84) = 1/3$$

En este ejemplo, el hecho de saber que la molécula 1 está presente en una muestra no cambia la probabilidad de que la molécula 2 esté presente en ella. El evento B consta de la misma proporción del número total de muestras que la proporción de muestras en A.

Además, $P(A \mid B) = P(A) = 3/7$ y $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 1/7$.

El ejemplo precedente ilustra el siguiente resultado general.

Definición

Dos eventos son **independientes** si es verdadero cualquiera de los siguientes enunciados equivalentes.

1) $P(A \mid B) = P(A)$
2) $P(B \mid A) = P(B)$
3) $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ (3-9)

Tabla 3-4 Moléculas en muestras de aire

		Molécula 1 presente	
		no	sí
Molécula 2 presente	no	32	24
	sí	16	12

El concepto de independencia es una importante relación entre eventos y se usa ampliamente en este libro. Una relación mutuamente excluyente entre dos eventos se basa únicamente en los resultados que comprenden los eventos. Sin embargo, una relación de independencia depende del modelo de probabilidad usado para el experimento aleatorio. Con frecuencia, se supone que la independencia es parte del experimento aleatorio que describe el sistema físico bajo estudio.

En el ejemplo 3-23, la probabilidad de que la segunda parte seleccionada esté defectuosa no depende de la primera parte porque la primera parte se reemplaza. Entonces, la probabilidad del resultado (*defectuosa, defectuosa*) se calcula como el producto de las probabilidades (50/850)(50/580) = 0.0035, al aplicar la propiedad 3 de la definición de independencia.

EJEMPLO 3-25

La producción de un día de partes manufacturadas contiene 50 partes que no cumplen con los requerimientos del cliente y 800 que sí lo hacen. Se seleccionan dos partes al azar, sin reemplazo, del lote. Sea que A denote el evento de que la primera parte está defectuosa y sea que B denote el evento de que la segunda parte está defectuosa.

Se sospecha que estos dos eventos no son independientes, porque el hecho de saber que la primera parte está defectuosa sugiere que es menos factible que la segunda parte seleccionada esté defectuosa. De hecho, $P(B \mid A) = 49/849$. Ahora bien, ¿cuál es $P(B)$? Encontrar la probabilidad no condicional $P(B)$ es un tanto difícil porque es necesario considerar los valores posibles de la primera selección.

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \mid A)\,P(A) + P(B \mid A')P(A') \\ &= (49/849)(50/850) + (50/849)(800/850) \\ &= 50/850 \end{aligned}$$

Como resultado interesante, $P(B)$, la probabilidad no condicional de que la segunda parte seleccionada esté defectuosa, sin ninguna información de la primera parte, es igual a $P(A)$. No obstante, nuestro objetivo es determinar la independencia. Puesto que $P(B \mid A)$ no es igual a $P(B)$, los dos eventos no son independientes, como se sospechaba.

Cuando se consideran tres o más eventos, es posible ampliar la definición de independencia. Una ampliación simple que suele ser útil es el siguiente resultado general.

Definición

Los eventos $E_1, E_2, \ldots, E_n$ son independientes si y sólo si para cualquier subconjunto $E_{i1}, E_{i2}, \ldots, E_{ik}$,

$$P(E_{i1} \cap E_{i2} \cap \ldots \cap E_{ik}) = P(E_{i1}) \times P(E_{i2}) \times \ldots \times P(E_{ik}) \qquad (3\text{-}10)$$

En general, esta definición se usa para calcular la probabilidad de que ocurran varios eventos suponiendo que son independientes y cuando se conocen las probabilidades de cada evento particular. Saber si los eventos son independientes o no, por lo general se deriva de la comprensión fundamental del experimento aleatorio.

EJEMPLO 3-26

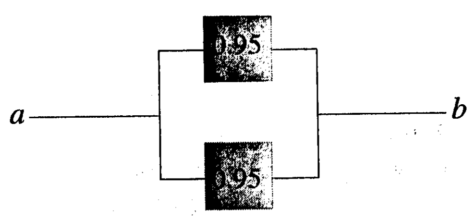
Suponga que la probabilidad de que una oblea contenga una partícula de contaminación grande es 0.01 y que las obleas son independientes; es decir, la probabilidad de que una oblea contenga una partícula grande no depende de las características de ninguna de las obleas restantes. Si se analizan 15 obleas, ¿cuál es la probabilidad de que no se encuentren partículas grandes?

Sea que E_i denote el evento de que la oblea i no contiene partículas grandes, $i = 1, 2, ..., 15$. Entonces, $P(E_i) = 0.99$. La probabilidad pedida puede representarse como $P(E_1 \cap E_2 \cap ... \cap E_{15})$. Por el supuesto de independencia y la ecuación 3-10

$$P(E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_{15}) = P(E_1) \times P(E_2) \times \ldots \times P(E_{15}) = 0.99^{15} = 0.86$$

EJEMPLO 3-27

El circuito ilustrado abajo sólo opera si hay una trayectoria de dispositivos funcionales de izquierda a derecha. La probabilidad de que cada dispositivo funcione se indica en la ilustración. Suponga que los dispositivos fallan independientemente. ¿Cuál es la probabilidad de que el circuito opere?



Sea que T y B denoten los eventos de que los dispositivos superior e inferior operan, respectivamente. Hay una trayectoria si al menos uno de los dispositivos opera. La probabilidad de que el circuito opere es

$$P(T \text{ o } B) = 1 - P[(T \text{ o } B)'] = 1 - P(T' \text{ y } B')$$

Por el supuesto de independencia,

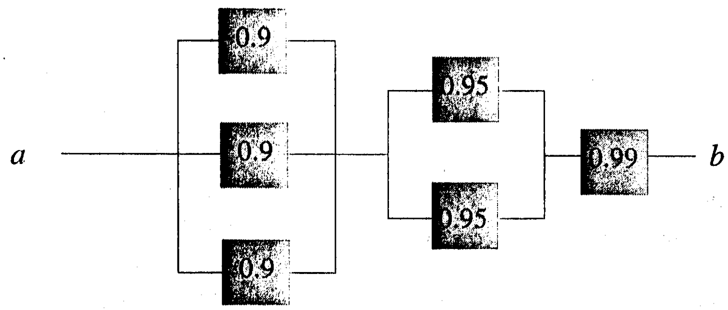
$$P(T' \text{ y } B') = P(T')P(B') = (1 - 0.95)^2 = 0.05^2$$

de donde

$$P(T \text{ o } B) = 1 - 0.05^2 = 0.9975$$

EJEMPLO 3-28

El circuito ilustrado abajo sólo opera si hay una trayectoria de dispositivos funcionales de izquierda a derecha. La probabilidad de que cada dispositivo funcione se indica en la ilustración. Suponga que los dispositivos fallan independientemente. ¿Cuál es la probabilidad de que el circuito opere?



Usando la independencia, se obtiene $(1 - 0.1^3)(1 - 0.05^2)(0.99) = 0.987$.

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 3-6

3-65. Si $P(A \mid B) = 0.4$, $P(B) = 0.8$ y $P(A) = 0.6$, ¿los eventos A y B son independientes?

3-66. Si $P(A \mid B) = 0.3$, $P(B) = 0.8$ y $P(A) = 0.3$, ¿los eventos B y el complemento de A son independientes?

3-67. Se analizan las placas circulares plásticas de policarbonato de un proveedor para la resistencia a las rayaduras y la resistencia a los impactos. Los resultados de 100 placas circulares se resumen a continuación:

		resistencia a los impactos	
		alta	baja
resistencia a las rayaduras	alta	80	9
	baja	6	5

Sea que A denote el evento de que una placa circular tiene alta resistencia a los impactos y sea que B denote el evento de que una placa circular tiene alta resistencia a las rayaduras. ¿Los eventos A y B son independientes?

3-68. Muestras de una pieza de aluminio fundido se clasifican con base en el acabado de la superficie (en micropulgadas) y en las mediciones de la longitud. Los resultados de 100 piezas se resumen a continuación:

		longitud	
		excelente	buena
acabado de la superficie	excelente	75	7
	bueno	10	8

Sea que A denote el evento de que una muestra tiene un terminado de la superficie excelente y sea que B denote el evento de que una muestra tiene una longitud excelente. ¿Los eventos en A y B son independientes?

3-69. Muestras de hule espuma de tres proveedores se clasifican de acuerdo a si cumplen o no con las especificaciones. Los resultados de 100 muestras se resumen a continuación:

		cumple	
		sí	no
proveedor	1	18	2
	2	17	3
	3	30	10

Sea que A denote el evento de que una muestra es del proveedor 1 y sea que B denote el evento de que una muestra cumple con las especificaciones. ¿Los eventos en A y B son independientes?

3-70. Si $P(A) = 0.2$ y $P(B) = 0.2$ y A y B son mutuamente excluyentes, ¿son independientes?

3-71. Muestras de hule espuma de dos proveedores se evalúan de acuerdo a si cumplen o no con las especificaciones. Los resultados de 126 muestras se resumen a continuación:

		cumple	
		sí	no
	1	80	4
proveedor	2	40	2

Sea que A denote el evento de que una muestra es del proveedor 1 y sea que B denote el evento de que una muestra cumple con las especificaciones.

a) ¿Son independientes A y B?
b) ¿Son independientes A' y B?

3-72. La probabilidad de que una prueba de laboratorio contenga niveles de contaminación altos es 0.10. Se verifican cinco muestras y éstas son independientes.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna contenga niveles altos de contaminación?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente una contenga niveles altos de contaminación?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una contenga niveles altos de contaminación?

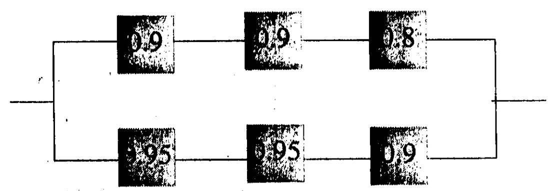
3-73. En una prueba de una tarjeta de circuito impreso en la que se utiliza un patrón de prueba aleatorio, un arreglo de 10 bits es igualmente factible que sea cero o uno. Suponga que los bits son independientes.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que todos los bits sean unos?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que todos los bits sean ceros?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente cinco bits sean unos y cinco sean ceros?

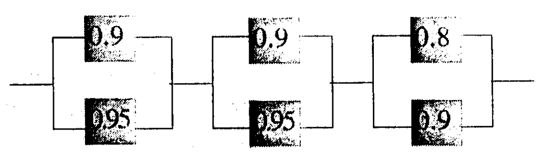
3-74. Ocho cavidades en una herramienta de moldeo por inyección produce conectores de plástico que caen en una salida común. Se escoge una muestra cada varios minutos. Suponga que las muestras son independientes.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que cinco muestras sucesivas se hayan producido en la cavidad uno del molde?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que cinco muestras sucesivas se hayan producido en la misma cavidad del molde?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que cuatro de cinco muestras sucesivas se hayan producido en la cavidad uno del molde?

3-75. El circuito ilustrado abajo opera si y sólo si hay una trayectoria de dispositivos funcionales de izquierda a derecha. La probabilidad de que cada dispositivo funcione se indica en la ilustración. Suponga que la probabilidad de que un dispositivo sea funcional no depende de si otros dispositivos son funcionales o no. ¿Cuál es la probabilidad de que el circuito opere?



3-76. El circuito ilustrado abajo opera si y sólo si hay una trayectoria de dispositivos funcionales de izquierda a derecha. La probabilidad de que cada dispositivo funcione se indica en la ilustración. Suponga que la probabilidad de que un dispositivo funcione no depende de si otros dispositivos son funcionales o no. ¿Cuál es la probabilidad de que el circuito opere?



3-77. Un dispositivo de almacenamiento óptico utiliza un procedimiento de recuperación de errores que requiere una lectura satisfactoria inmediata de cualquier dato escrito. Si la lectura no tiene éxito después de tres operaciones de escritura, ese sector del disco se elimina como inaceptable para almacenamiento de datos. En una parte aceptable del disco, la probabilidad de una lectura satisfactoria es 0.98.Suponga que las lecturas son independientes. ¿Cuál es la probabilidad de que una parte aceptable del disco sea eliminada como inaceptable para almacenamiento de datos?

3-78. Un lote de 500 contenedores de jugo de naranja congelado contiene 5 que están defectuosos. Del lote se seleccionan dos, al azar y sin reemplazo. Sea que A y B denoten los eventos de que el primer y segundo contenedores están defectuosos, respectivamente.
a) ¿Son A y B eventos independientes?
b) Si el muestreo se hiciera con reemplazo, ¿serían independientes A y B?

3-7 TEOREMA DE BAYES

En algunos ejemplos, no se cuenta con una tabla completa de información como en el caso del ejemplo 3-24. Pudiera conocerse una probabilidad condicional pero nos interesaría calcular una probabilidad diferente. En el problema de la contaminación de semiconductores del ejemplo 3-22, podría formularse la siguiente pregunta. Si el chip semiconductor en el producto falla, ¿cuál es la probabilidad de que el chip se haya expuesto a niveles altos de contaminación?

Por la definición de probabilidad condicional,

$$P(A \cap B) = P(A \mid B)P(B) = P(B \cap A) = P(B \mid A)P(A)$$

Ahora bien, considerando el segundo y el último término de la expresión anterior, puede escribirse

$$P(B \mid A) = \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B)} \quad \text{para } P(B) > 0 \qquad (3\text{-}11)$$

Este es un resultado útil que permite resolver $P(A \mid B)$ en términos de $P(B \mid A)$.

EJEMPLO 3-29

La pregunta planteada al principio de esta sección puede responderse como sigue. La probabilidad pedida puede expresarse como $P(H \mid F)$. Entonces,

$$P(H \mid F) = P(F \mid H)\, P(H)/\, P(F) = 0.10(0.20)/0.0235 = 0.85$$

El valor de $P(F)$ en el denominador de la solución, se encontró en el ejemplo 3-21.

En general, si $P(B)$ del denominador de la ecuación 3-11 se escribe empleando la regla de probabilidad total de la ecuación 3-8, se obtiene el siguiente resultado general que se conoce como el teorema de Bayes.

Teorema de Bayes

Si $E_1, E_2, \ldots, E_k$ son k eventos mutuamente excluyentes y exhaustivos y B es un evento cualquiera, entonces

$$P(E_1|B) = \frac{P(B|E_1)P(E_1)}{P(B|E_1)P(E_1) + P(B|E_2)P(E_2) + \ldots + P(B|E_k)P(E_k)}$$

para $P(B) > 0$

EJEMPLO 3-30

Dado que un nuevo procedimiento médico ha demostrado ser efectivo para la detección temprana de una enfermedad, se propone un estudio médico exhaustivo de la población. La probabilidad de que la prueba identifique correctamente a alguien que no padece la enfermedad como negativo es 0.95 y la probabilidad de que la prueba identifique correctamente a alguien con la enfermedad como positivo es 0.99. La incidencia de la enfermedad en la población general es 0.0001. Usted se somete a la prueba y el resultado es positivo. ¿Cuál es la probabilidad de que usted padezca la enfermedad?

Sea que D denote el evento de que usted padece la enfermedad y sea que S denote el evento de que la prueba señala positivo. La probabilidad pedida puede denotarse como $P(D \mid S)$. La probabilidad de que la prueba señale correctamente a alguien que no padezca la enfermedad como negativo es 0.95. Por consiguiente, la probabilidad de una prueba positiva en ausencia de la enfermedad es

$$P(S \mid D') = 0.05$$

Por el teorema de Bayes,

$$\begin{aligned} P(D \mid S) &= P(S \mid D)\,P(D)/[P(S \mid D)P(D) + P(S \mid D')P(D')] \\ &= 0.99(0.0001)/[0.99(0.0001) + 0.05(1 - 0.0001)] \\ &= 1/506 = 0.002 \end{aligned}$$

Sorprendentemente, aun cuando la prueba es efectiva, en el sentido de que $P(S \mid D)$ es alta y $P(S \mid D')$ es baja, debido a que la incidencia de la enfermedad en la población general es baja, las posibilidades de que usted padezca en realidad la enfermedad son muy remotas incluso si la prueba es positiva.

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 3-7

3-79. Suponga que $P(A \mid B) = 0.8$, $P(A) = 0.5$ y $P(B) = 0.2$. Determine $P(B \mid A)$.

3-80. El software para detectar fraudes con tarjetas telefónicas personales rastrea el número de áreas metropolitanas donde se originan las llamadas cada día. Se ha encontrado que 1% de los usuarios legítimos hacen llamadas de dos o más áreas metropolitanas en un solo día. Sin embargo, 30% de los usuarios fraudulentos hacen llamadas de dos o más áreas metropolitanas en un solo día. La proporción de usuarios fraudulentos es 0.01%. Si el mismo usuario hace llamadas de dos o más áreas metropolitanas en un solo día, ¿cuál es la probabilidad de que el usuario sea fraudulento?

3-81. Los láser de semiconductores usados en los productos de almacenamiento óptico requieren niveles más altos de energía en las operaciones de escritura que en las de lectura. Las operaciones con niveles altos de energía reducen la vida útil del láser.

Los láser de los productos utilizados para hacer respaldos de discos magnéticos de alta velocidad realizan principalmente tareas de escritura y la probabilidad de que su vida útil rebase los cinco años es 0.95. Los láser instalados en productos que se usan para almacenamiento principal dedican aproximadamente la misma cantidad de tiempo a tareas de lectura y escritura, y la probabilidad de que su vida útil rebase los cinco años es 0.995. Ahora bien, 25% de los productos de un fabricante se usan para hacer respaldos y 75% de los productos se usan para almacenamiento principal.

Sea que A denote el evento de que la vida útil de un láser rebasa los cinco años y sea que B denote el evento de que un láser está en un producto utilizado para hacer respaldos.

Use un diagrama de árbol para determinar las siguientes probabilidades:

a) $P(B)$
b) $P(A \mid B)$
a) $P(A \mid B')$
b) $P(A \cap B)$
c) $P(A \cap B')$
d) $P(A)$
g) ¿Cuál es la probabilidad de que la vida útil de un láser rebase los cinco años?
h) ¿Cuál es la probabilidad de que un láser que falló antes de cinco años proviniera de un producto usado para hacer respaldos?

3-82. Los clientes acostumbran evaluar en forma preliminar el diseño de los productos. En el pasado, 95% de los productos de gran éxito recibieron críticas favorables, 60% de los productos con un éxito moderado recibieron críticas favorables y 10% de los productos sin mucho éxito recibieron críticas favorables. Además, 40% de los productos han sido de gran éxito, 35% han sido de éxito moderado y 25% han sido productos sin mucho éxito.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un producto obtenga una crítica favorable?
b) Si un diseño nuevo obtiene una crítica favorable, ¿cuál es la probabilidad de que será un producto de gran éxito?
c) Si un producto no consigue una crítica favorable, ¿cuál es la probabilidad de que será un producto de gran éxito?

3-8 VARIABLES ALEATORIAS

Con frecuencia se desea resumir el resultado de un experimento aleatorio en un solo número. En muchos de los ejemplos de experimentos aleatorios que se han considerado, el espacio muestral se ha reducido a una descripción de los resultados posibles. En algunos casos, la descripción de los resultados es suficiente, pero en otros es conveniente asociar un número con cada resultado del espacio muestral. Debido a que no se conoce de antemano el resultado particular del experimento, el valor resultante de la variable tampoco se conoce de antemano. Por esta razón, la variable que asocia un número con el resultado de un experimento aleatorio se denomina **variable aleatoria**.

Definición

Una **variable aleatoria** es una función que asigna un número real a cada resultado del espacio muestral de un experimento aleatorio.

Una variable aleatoria se denota por una letra mayúscula, como X. Se hace referencia al conjunto de los números posibles de una variable aleatoria X como el **rango de X**. Una vez que se ha llevado a cabo el experimento, el valor medido de la variable aleatoria se denota por una letra minúscula como $x = 70$ miliamperes. Con frecuencia, un experimento aleatorio se resume con el valor medido de una variable aleatoria.

Este modelo puede vincularse con los datos que se resumieron en el capítulo 2 de la siguiente manera. Los datos son los valores medidos de una variable aleatoria, los cuales se obtienen al repetir varias veces un experimento aleatorio. Por ejemplo, la primera repetición podría resultar en una medición de la corriente de $x_1 = 70.1$; al día siguiente, $x_2 = 71.2$; el tercer día, $x_3 = 71.1$; etcétera. Entonces estos datos podrán resumirse empleando los métodos descriptivos expuestos en el capítulo 2.

Con frecuencia se supone que la medición de interés —la corriente en un experimento con un alambre de cobre o la longitud de una pieza maquinada— es un número real. Entonces es posible una precisión arbitraria en las mediciones. Por supuesto, en la práctica las centésimas de una unidad podrían redondearse a la décima más próxima. Se dice que la variable aleatoria que representa esta medición es una variable aleatoria **continua**. El rango de X incluye todos los valores en un intervalo de números reales; es decir, el rango de X puede pensarse como un continuo.

En otros experimentos podría registrarse un conteo, como el del número de bits transmitidos que se reciben con error. Entonces la medición se limita a números enteros. O podría registrarse una proporción, como 0.0042 de los 10 000 bits que se recibieron fueron con error. Entonces la medición es fraccionaria, pero sigue estando limitada a puntos discretos sobre la recta real. Siempre que la medición se limita a puntos discretos sobre la recta real, se dice que la variable aleatoria es una variable aleatoria **discreta**.

Definición

Una variable aleatoria **discreta** es una variable aleatoria con un rango finito (o contablemente infinito).

Una variable aleatoria **continua** es una variable aleatoria que tiene como rango un intervalo (sea finito o infinito) de números reales.

En algunos casos, la variable aleatoria X es en realidad discreta, pero, debido a que el rango de los valores posibles es tan extenso, podría resultar más conveniente analizar X como una variable aleatoria continua. Por ejemplo, supóngase que las mediciones de la corriente se leen en un instrumento digital que indica la corriente hasta la centésima de miliampere más próxima. Debido a que las mediciones posibles están limitadas, la variable aleatoria es discreta. Sin embargo, podría ser un enfoque más sencillo y conveniente suponer que las mediciones de la corriente son valores de una variable aleatoria continua.

Ejemplos de variables aleatorias **continuas:**
corriente eléctrica, longitud, presión, temperatura, tiempo, voltaje, peso
Ejemplos de variables aleatorias **discretas:**
número de rayaduras en una superficie, proporción de partes defectuosas entre 1 000 probadas, número de bits transmitidos recibidos con error

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 3-8

Decida si una variable aleatoria discreta o continua es el mejor modelo para cada una de las variables siguientes:

3-83. El tiempo hasta que un proyectil regresa a la Tierra.

3-84. El número de veces que un transistor en una memoria de computadora cambia de estado en una operación.

3-85. El volumen de gasolina que se pierde por evaporación durante el llenado de un tanque de combustible.

3-86. El diámetro exterior de una flecha maquinada.

3-87. El número de grietas que exceden media pulgada en 10 millas de una carretera interestatal.

3-88. El peso de una pieza de plástico moldeada por inyección.

3-89. El número de moléculas en una muestra de gas.

3-90. La concentración de la salida de un reactor.

3-91. La corriente en un circuito electrónico.

Ejercicios complementarios

3-92. En la prueba de los circuitos de tarjetas impresas, cada tarjeta pasa o no pasa la prueba. Una tarjeta que no pasa la prueba se somete entonces a verificación adicional para determinar cuál de los cinco tipos de defectos es el modo principal de falla. Represente el espacio muestral para este experimento.

3-93. Los datos de 200 piezas maquinadas se resumen a continuación:

	profundidad del taladro	
	mayor que la del diseño	menor que la del diseño
condición del borde		
burdo	15	10
regular	25	20
liso	60	70

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una pieza seleccionada tenga una condición del borde regular y una profundidad del taladro menor que la del diseño?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que una pieza seleccionada tenga una condición del borde regular o una profundidad del taladro menor que la del diseño?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que una pieza seleccionada no tenga una condición del borde regular o no tenga una profundidad del taladro menor que la del diseño?

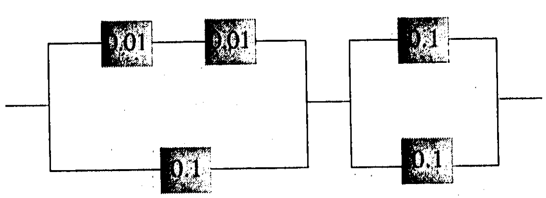
d) Construya una representación de diagrama de Venn de los eventos de este espacio muestral.

3-94. La probabilidad de que el pedido de un cliente no se envíe a tiempo es 0.05. Un cliente dado hace tres pedidos, con la suficiente separación en el tiempo como para considerarlos los eventos independientes.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que todos los pedidos se envíen a tiempo?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente un pedido no se envíe a tiempo?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que dos o más pedidos no se envíen a tiempo?

3-95. Una placa de acero contiene 20 pernos. Suponga que el torque de cinco pernos no está en el límite apropiado. Se seleccionan cuatro pernos al azar, sin reemplazo, para verificar el torque.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que el torque de los cuatro pernos seleccionados esté en el límite apropiado?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que el torque de al menos uno de los pernos seleccionados no esté en el límite apropiado?

3-96. El circuito ilustrado abajo opera si y sólo si hay una trayectoria de dispositivos funcionales de izquierda a derecha. Suponga que los dispositivos fallan independientemente y que la probabilidad de *falla* de cada dispositivo es la que se indica. ¿Cuál es la probabilidad de que el circuito opere?



3-97. En una operación de llenado automatizado, la probabilidad de un llenado incorrecto cuando el proceso opera a baja velocidad es 0.001. Cuando el proceso opera a alta velocidad, la probabilidad de un llenado incorrecto es 0.01. Suponga que 30% de los recipientes se llenan cuando el proceso opera a alta velocidad y el resto se llena cuando el proceso opera a baja velocidad.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que un recipiente sea llenado incorrectamente?
b) Si se encuentra un recipiente llenado incorrectamente, ¿cuál es la probabilidad de que se haya llenado durante la operación a alta velocidad?

3-98. Una herramienta de encarte robotizado contiene 10 componentes principales. La probabilidad de que cualquiera de ellos falle durante el periodo de garantía es 0.01. Suponga que los componentes fallan independientemente y que la herramienta falla si cualquiera de los componentes falla. ¿Cuál es la probabilidad de que la herramienta falle durante el periodo de garantía?

3-99. Una herramienta mecánica está sin usarse 15% del tiempo. Usted solicita el uso inmediato de la herramienta mecánica en cinco ocasiones diferentes durante el año. Suponga que sus solicitudes representan eventos independientes.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que la herramienta mecánica esté desocupada en todas las ocasiones que usted lo solicita?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que la herramienta mecánica esté desocupada exactamente en cuatro ocasiones que usted lo solicita?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que la herramienta mecánica esté desocupada en al menos tres ocasiones que usted lo solicita?

3-100. Un lote de 50 arandelas de separación contiene 30 arandelas cuyo grosor excede las especificaciones de diseño. Suponga que se seleccionan tres arandelas, al azar y sin reemplazo, del lote.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que las tres arandelas seleccionadas sean más gruesas que las especificaciones del diseño?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que la tercera arandela seleccionada sea más gruesa que las especificaciones del diseño si las dos primeras fueron más delgadas que la especificación?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que la tercera arandela seleccionada sea más gruesa que las especificaciones del diseño?

3-101. Continuación del ejercicio 3-100. Se seleccionan arandelas del lote al azar, sin reemplazo.
a) ¿Cuál es el número mínimo de arandelas que necesitan seleccionarse para que la

probabilidad de que todas las arandelas sean más delgadas que las especificaciones de diseño sea menor que 0.10?

b) ¿Cuál es el número mínimo de arandelas que necesitan seleccionarse para que la probabilidad de que una o más arandelas sean más gruesas que las especificaciones del diseño sea al menos 0.90?

3-102. En la tabla siguiente se enlista el historial de las características opcionales en 940 pedidos de una computadora básica.

		memoria extra	
		no	sí
procesador de alta velocidad opcional	no	514	68
	sí	112	246

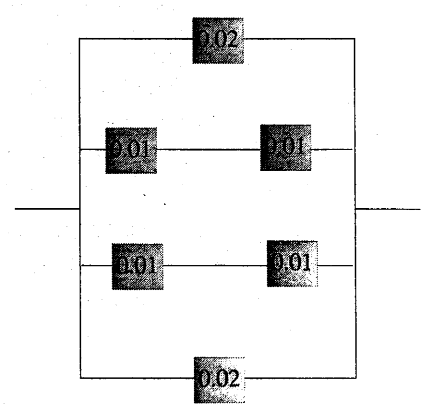
Sea que A denote el evento de que un pedido incluya el procesador de alta velocidad opcional y sea que B denote el evento de que un pedido requiera memoria extra. Determine las siguientes probabilidades:

a) $P(A \cup B)$
b) $P(A \cap B)$
c) $P(A' \cup B)$
d) $P(A' \cap B')$
e) ¿Cuál es la probabilidad de que un pedido requiera un procesador de alta velocidad opcional, dado que el pedido requiera memoria extra?
f) ¿Cuál es la probabilidad de que un pedido requiera memoria extra, dado que el pedido requiere el procesador de alta velocidad opcional?

3-103. La alineación entre la cinta magnética y la cabeza en un sistema de almacenamiento en cinta magnética, afecta el desempeño del sistema. Suponga que 10% de las operaciones de lectura sufren degradaciones por alineaciones sesgadas, 5% de las operaciones de lectura sufren degradaciones por alineaciones descentradas y las operaciones de lectura restantes tienen una alineación correcta. La probabilidad de un error de lectura es 0.01 para una alineación sesgada, 0.02 para una alineación descentrada y 0.001 para una alineación correcta.

a) ¿Cuál es la probabilidad de un error de lectura?
b) Si ocurre un error de lectura, ¿cuál es la probabilidad de que se deba a una alineación sesgada?

3-104. El circuito ilustrado abajo opera si y sólo si hay una trayectoria de dispositivos funcionales de izquierda a derecha. Suponga que los dispositivos fallan independientemente y que la probabilidad de *falla* de cada dispositivo es la que se indica. ¿Cuál es la probabilidad de que el circuito opere?



EJERCICIOS PARA DESARROLLAR EL INTELECTO

3-105. La alineación entre la cinta magnética y la cabeza en un sistema de almacenamiento de cinta magnética afecta el desempeño del sistema. Suponga que 10% de las operaciones de lectura sufren degradaciones por alineaciones sesgadas, 5% por alineaciones descentradas, 1% por alineación tanto sesgada como descentrada y las operaciones de lectura restantes tienen la alineación correcta. La probabilidad de un error de lectura es 0.01 para una alineación sesgada, 0.02 para una alineación descentrada, 0.06 para ambas condiciones y 0.001 para una alineación correcta. ¿Cuál es la probabilidad de un error de lectura?

3-106. Suponga que un lote de arandelas es lo suficientemente grande para que pueda suponerse que el muestreo se hace con reemplazo. Suponga que 60% de las arandelas exceden el grosor de diseño.

a) ¿Cuál es el número mínimo de arandelas que es necesario seleccionar para que la probabilidad de que todas las arandelas sean más delgadas que el grosor de diseño sea menor que 0.10?

b) ¿Cuál es el número mínimo de arandelas que es necesario seleccionar para que la probabilidad de que una o más arandelas sean más gruesas que el grosor de diseño sea al menos 0.90?

3-107. Una fábrica de productos biotecnológicos puede producir paquetes para pruebas de diagnóstico a un costo de $20. Cada paquete para el que hay demanda en la semana de producción puede venderse a $100. Sin embargo, la vida media de los componentes del paquete requiere que éste se deseche si no se vende en la semana de producción. El costo de desechar el paquete es de $5. La demanda semanal se resume a continuación:

Demanda semanal				
Número de unidades	0	50	100	200
Probabilidad de la demanda	0.05	0.4	0.3	0.25

¿Cuántos paquetes deberán producirse cada semana para maximizar las ganancias promedio de la fábrica?

3-108. Suponer las siguientes características del proceso de inspección del ejercicio 3-95. Si un operador verifica un perno, la probabilidad de que se identifique un perno con el torque incorrecto es 0.95. Si un perno inspeccionado tiene el torque correcto, la conclusión del operador siempre es acertada. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos un perno de la muestra de cuatro se identifique como un perno con el torque incorrecto?

3-109. Si los eventos A y B son independientes, demuestre que A' y B' son independientes.

3-110. Suponga que la tabla del ejercicio 3-71 se generaliza de la siguiente manera:

		cumple sí	no
proveedor	1	ka	kb
	2	a	b

donde a, b y k son enteros positivos. Sea que A denote el evento de que una muestra de hule espuma es del proveedor 1 y sea que B denote el evento de que una muestra de hule espuma cumple con las especificaciones. Demuestre que A y B son eventos independientes.

Este ejercicio ilustra el resultado de que siempre que los renglones de una tabla (con r renglones y c columnas) son proporcionales, un evento definido por una categoría de renglón y un evento definido por una categoría de columna son independientes.