

CAPÍTULO 2

Factores: cómo el tiempo y el interés afectan al dinero

En el capítulo anterior aprendimos los conceptos básicos de la ingeniería económica y su papel en la toma de decisiones. El flujo de efectivo resulta fundamental en todo estudio económico. Los flujos de efectivo ocurren en muchas configuraciones y cantidades: valores únicos aislados, series que son uniformes y series que aumentan o disminuyen en cantidades o porcentajes constantes. El presente capítulo realiza deducciones para todos los factores utilizados comúnmente en la ingeniería económica, que toman en cuenta el valor del dinero en el tiempo.

La aplicación de los factores se ilustra mediante el empleo de sus formas matemáticas y de un formato de notación estándar. Se incluyen las funciones de las hojas de cálculo, para trabajar de manera rápida con las series de flujo de efectivo y para desarrollar análisis de sensibilidad.

El estudio de caso se enfoca en los impactos significativos que el interés compuesto y el tiempo tienen sobre el valor y la cantidad del dinero.

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Objetivo general: deducir y usar los factores de ingeniería económica para explicar el valor del dinero en el tiempo.

Factores F/P y P/F

Factores P/A y A/P

Factores F/A y A/F

Interpole valores de factores

Factores P/G y A/G

Gradiente geométrico

Calcule i

Calcule n

Hojas de cálculo

Este capítulo ayudará al lector a:

1. Deducir y utilizar los factores de cantidad compuesta y de valor presente para pago único.
2. Deducir y aplicar los factores de valor presente y recuperación de capital de serie uniforme.
3. Deducir y emplear los factores de cantidad compuesta y fondo de amortización de serie uniforme.
4. Interpolación lineal para calcular el valor de un factor.
5. Deducir y usar los factores del valor presente de gradiente aritmético y de serie uniforme.
6. Deducir y aplicar las fórmulas de gradiente geométrico.
7. Determinar la tasa de interés (tasa de retorno) de una secuencia de flujos de efectivo.
8. Determinar el número de años requeridos para lograr la equivalencia en una secuencia de flujos de efectivo.
9. Desarrollar una hoja de cálculo para realizar análisis de sensibilidad básico mediante las funciones de la hoja de cálculo.

2.1 FACTORES DE PAGO ÚNICO (F/P Y P/F)

El factor fundamental en la ingeniería económica es el que determina la cantidad de dinero F que se acumula después de n años (o periodos), a partir de un valor único presente P con interés compuesto una vez por año (o por periodo). Recuerde que el interés compuesto se refiere al interés pagado sobre el interés. Por consiguiente, si una cantidad P se invierte en algún momento $t = 0$, la cantidad de dinero F_1 que se habrá acumulado en un año a partir del momento de la inversión a una tasa de interés de i por ciento anual será:

$$\begin{aligned} F_1 &= P + Pi \\ &= P(1 + i) \end{aligned}$$

donde la tasa de interés se expresa en forma decimal. Al final del segundo año, la cantidad de dinero acumulada F_2 es la cantidad acumulada después del año 1, más el interés desde el final del año 1, hasta el final del año 2 sobre la cantidad total F_1 .

$$\begin{aligned} F_2 &= F_1 + F_1 i \\ &= P(1 + i) + P(1 + i)i \end{aligned} \quad [2.1]$$

Ésta es la lógica que se utiliza en el capítulo 1 para el interés compuesto, de manera específica en los ejemplos 1.8 y 1.18. La cantidad F_2 se expresa como:

$$\begin{aligned} F_2 &= P(1 + i + i + i^2) \\ &= P(1 + 2i + i^2) \\ &= P(1 + i)^2 \end{aligned}$$

En forma similar, la cantidad de dinero acumulada al final del año 3, si se utiliza la ecuación [2.1], será:

$$F_3 = F_2 + F_2 i$$

Al sustituir $P(1 + i)^2$ por F_2 y simplificar, se obtiene

$$F_3 = P(1 + i)^3$$

De acuerdo con los valores anteriores, por inducción matemática es evidente que la fórmula puede generalizarse para n años de la siguiente manera:

$$F = P(1 + i)^n \quad [2.2]$$

El factor $(1 + i)^n$ se denomina *factor de cantidad compuesta de pago único* (FCCPU); pero en general se hace referencia a éste como el *factor F/P* . Éste es el factor de conversión que, cuando se multiplica por P , produce la cantidad futura F de una inversión inicial P después de n años, a la tasa de interés i . El diagrama de flujo de efectivo se muestra en la figura 2.1a.

Invierta la situación para calcular el valor P para una cantidad dada F que ocurre n periodos en el futuro. Tan sólo resuelva la ecuación [2.2] para P .

$$P = F \left[\frac{1}{(1 + i)^n} \right] \quad [2.3]$$

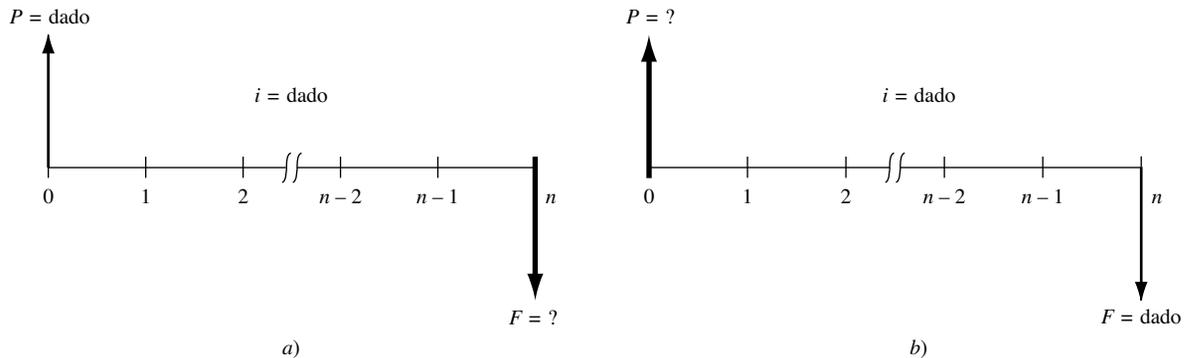


Figura 2.1 Diagrama de flujo de efectivo para factores de pago único: a) determine F y b) determine P .

La expresión entre corchetes se conoce como el *factor de valor presente de pago único* (FVPPU), o el *factor P/F* . Tal expresión determina el valor presente P de una cantidad futura dada F , después de n años a una tasa de interés i . El diagrama de flujo de efectivo se muestra en la figura 2.1b.

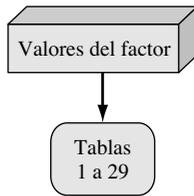
Observe que los dos factores derivados aquí son para *pago único*; es decir, se utilizan para encontrar la cantidad presente o futura cuando se tiene sólo un pago o recibo.

Se ha adoptado una notación estándar para todos los factores. La notación incluye dos símbolos de flujo de efectivo, la tasa de interés y el número de periodos. Siempre está en la forma general $(X/Y, i, n)$. La literal X representa lo que se busca; mientras que la literal Y representa lo que está dado. Por ejemplo, F/P significa *encuentre F cuando P está dado*. La i es la tasa de interés en porcentaje, y n representa el número de periodos implicados. En consecuencia, $(F/P, 6\%, 20)$ representa el factor que encuentra la cantidad futura F acumulada en 20 periodos si la tasa de interés es de 6% por periodo. La P está dada. La notación estándar, más simple de usar que las fórmulas y los nombres de los factores, se utilizará de aquí en adelante.

La tabla 2.1 resume la notación estándar y las ecuaciones para los factores F/P y P/F . Esta información también está incluida dentro de los forros.

Para simplificar los cálculos rutinarios de la ingeniería económica se han elaborado las tablas de valores del factor para tasas de interés desde 0.25 hasta 50%, y periodos del tiempo van desde 1 hasta grandes valores de n , dependiendo del valor i .

TABLA 2.1 Factores F/P y P/F : notación y ecuaciones					
Factor		Encontrar /dado	Ecuación en notación estándar	Ecuación con fórmula de factor	Funciones de Excel
Notación	Nombre				
$(F/P, i, n)$	Cantidad compuesta pago único	F/P	$F = P(F/P, i, n)$	$F = P(1 + i)^n$	$FV(i\%, n, P)$
$(P/F, i, n)$	Valor presente pago único	P/F	$P = F(P/F, i, n)$	$P = F[1/(1 + i)^n]$	$PV(i\%, n, F)$



Estas tablas, que se encuentran al final del libro, están ordenadas de acuerdo con factores a lo largo de la parte superior y con el número de periodos n de manera descendente a la izquierda. La palabra *discreto* en el encabezado de cada tabla enfatiza el que dichas tablas utilizan la convención de final de periodo y que el interés es compuesto una vez cada periodo de interés. Para un factor, tasa de interés y tiempo dados, el valor correcto del factor se encuentra en la intersección del nombre del factor y n . Por ejemplo, el valor del factor $(P/F, 5\%, 10)$ se encuentra en la columna P/F de la tabla 10 en el periodo 10: 0.6139. Este valor se determina aplicando la ecuación [2.3].

$$\begin{aligned} (P/F, 5\%, 10) &= \frac{1}{(1+i)^n} \\ &= \frac{1}{(1.05)^{10}} \\ &= \frac{1}{1.6289} = 0.6139 \end{aligned}$$



Para la *solución por computadora*, el valor F se calcula con la función VF usando el formato

$$VF(i\%, n, P)$$

Un signo = debe preceder a la función cuando se ingrese. La cantidad P se determina utilizando la función VP con el formato

$$VP(i\%, n, F)$$

Estas funciones se incluyen en la tabla 2.1. Consulte el apéndice A o la ayuda en línea de Excel para mayor información acerca de las funciones VF y VP. Los ejemplos 2.1 y 2.2 ilustran soluciones con computadora para ambas funciones.

EJEMPLO 2.1

Un ingeniero industrial recibió un bono de \$12 000 que desea invertir ahora. Quiere calcular el valor equivalente después de 24 años, cuando planea usar todo el dinero resultante como enganche o pago inicial de una casa de vacaciones en una isla. Suponga una tasa de retorno de 8% anual para cada uno de los 24 años. *a)* Determine la cantidad que puede pagar inicialmente, usando tanto la notación estándar como la fórmula de factor. *b)* Use una computadora para encontrar la cantidad antes mencionada.

a) Solución a mano

Los símbolos y sus valores son

$$P = \$12\,000 \quad F = ? \quad i = 8\% \text{ anual} \quad n = 24 \text{ años}$$

El diagrama de flujo de efectivo es el mismo que el de la figura 2.1a.

Notación estándar: Determine F usando el factor F/P para 8% y 24 años. La tabla 13 proporciona el valor del factor.

$$\begin{aligned} F &= P(F/P, i, n) = 12\,000(F/P, 8\%, 24) \\ &= 12\,000(6.3412) \\ &= \$76\,094.40 \end{aligned}$$

Fórmula de factor: Aplique la ecuación [2.2] para calcular el valor futuro F :

$$\begin{aligned} F &= P(1 + i)^n = 12\,000(1 + 0.08)^{24} \\ &= 12\,000(6.341181) \\ &= \$76\,094.17 \end{aligned}$$

La ligera diferencia en las respuestas se debe al error de redondeo introducido por los valores de factor tabulados. Una interpretación equivalente de este resultado es que los \$12 000 actuales equivaldrán a \$76 094 después de 24 años de crecer al 8% por año, anualmente compuesto.

b) Solución por computadora

Para encontrar el valor futuro use la función VF que tiene el formato $\text{VF}(i\%,n,A,P)$. La hoja de cálculo se desplegará como la que se muestra en la figura 1.5a, excepto que la entrada de celda es $\text{VF}(8\%,24,,12\,000)$. El valor F desplegado por Excel aparece como (\$76,094.17) en rojo para indicar un flujo de efectivo de salida. La función VF realiza el cálculo $F = P(1 + i)^n = 12,000(1 + 0.08)^{24}$ y presenta la respuesta en la pantalla.



EJEMPLO 2.2

Hewlett-Packard realizó un estudio que indica que \$50 000 en la reducción de mantenimiento este año (es decir, año cero), en una línea de procesamiento, fue el resultado del mejoramiento de la tecnología de fabricación de circuitos integrados (CI), con base en diseños que cambian rápidamente.

- Si Hewlett-Packard considera que este tipo de ahorro vale un 20% anual, encuentre el valor equivalente de este resultado después de 5 años.
- Si el ahorro de \$50 000 en mantenimiento ocurre ahora, calcule su valor equivalente 3 años antes con un interés de 20% anual.
- Desarrolle una hoja de cálculo para responder los dos incisos anteriores a tasas compuestas de 20 y 5% anuales. De manera adicional, elabore una gráfica de barras en Excel que indique los valores equivalentes, en los tres diferentes momentos, para ambos valores de la tasa de rendimiento.

Solución

- El diagrama de flujo de efectivo aparece como en la figura 2.1a. Los símbolos y sus valores son

$$P = \$50\,000 \quad F = ? \quad i = 20\% \text{ anual} \quad n = 5 \text{ años}$$

Utilice el factor F/P para determinar F después de 5 años.

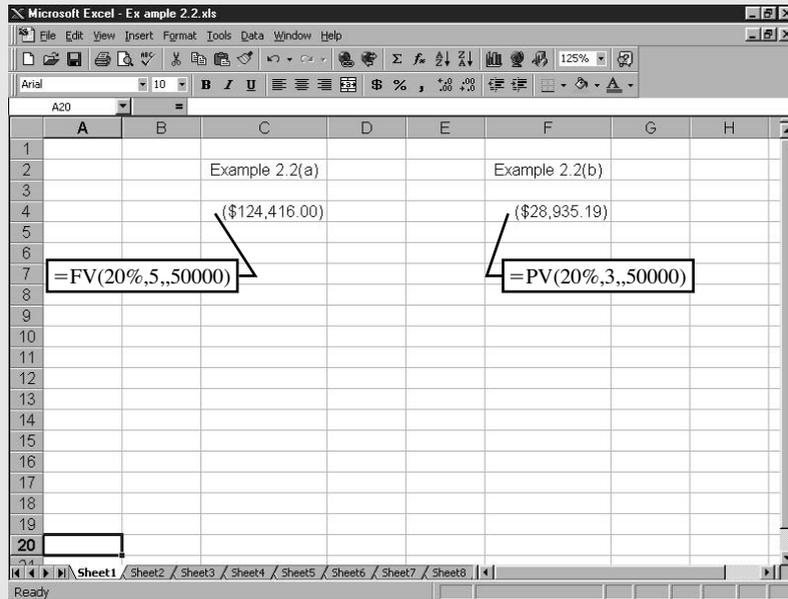
$$\begin{aligned} F &= P(F/P, i, n) = \$50,000(F/P, 20\%, 5) \\ &= 50,000(2.4883) \\ &= \$124,415.00 \end{aligned}$$

La función $\text{VF}(20\%,5,,50000)$ proporciona la misma respuesta. Véase la figura 2.2a, celda C4.

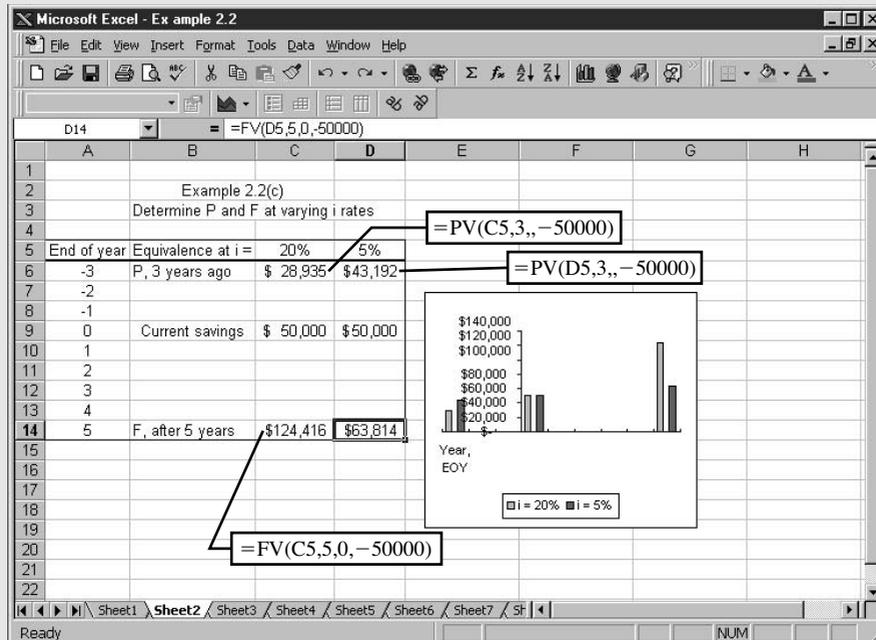
- En este caso, el diagrama de flujo de efectivo aparece como en la figura 2.1b, con F ubicado en el tiempo $t = 0$ y el valor P colocado 3 años antes en $t = -3$. Los símbolos y sus valores son

$$P = ? \quad F = \$50,000 \quad i = 20\% \text{ anual} \quad n = 3 \text{ años}$$





a)



b)

Figura 2.2

a) Hoja de cálculo Q-solv para el ejemplo 2.2a y b; b) hoja de cálculo completa con gráfica de barras, ejemplo 2.2.

Use el factor P/F para determinar P tres años antes.

$$\begin{aligned} P &= F(P/F; i, n) = \$50,000(P/F, 20\%, 3) \\ &= 50,000(0.5787) = \$28,935.00 \end{aligned}$$

Un enunciado equivalente es que \$28,935 de hace tres años es lo mismo que \$50,000 en la actualidad, que crecerá a \$124,415 dentro de cinco años, considerando una tasa de interés compuesto anual de 20% por cada año.

Use la función $VP(i\%, n, A, F)$ y omita el valor A . La figura 2.2a muestra el resultado de ingresar $VP(20\%, 3, , 50000)$ en la celda F4, que es lo mismo que utilizar el factor P/F .



Sol-R

Solución por computadora

- c) La figura 2.2b es una solución completa en hoja de cálculo con una tabla de valores y una gráfica de barras. Se emplean dos columnas para efectuar cálculos primero con 20 y 5%, de modo que sea posible tener la gráfica para comparar los valores F y P . La fila 14 muestra los valores F usando la función VF con el formato $VF(i\%, 5, 0, -50,000)$, donde los valores i se toman de las celdas C5 y D5. El valor futuro $F = \$124,416$ en la celda C14 es el mismo (considerando el redondeo) que el calculado líneas arriba. El signo menos para 50,000 asegura que el resultado sea un número positivo en la gráfica.



Sol-E

La función VP se utiliza para encontrar los valores P en la fila 6. Por ejemplo, el valor presente a 20% en el año -3 se determina en la celda C6 utilizando la función VP . El resultado $P = \$28,935$ es el mismo que el obtenido previamente al usar el factor P/F . La gráfica muestra visualmente la notable diferencia que generan, sobre el periodo de 8 años, tasas de 20 y de 5%.

EJEMPLO 2.3

Un consultor independiente en ingeniería examinó algunos registros y encontró que el costo de los suministros de oficina varía como se muestra en la gráfica circular de la figura 2.3. Si el ingeniero quiere conocer el valor equivalente en el año 10 sólo de las cantidades mayores, ¿cuál será éste a una tasa de interés de 5% anual?

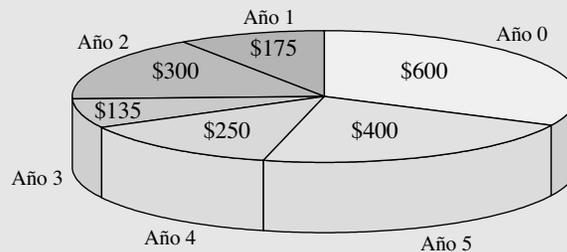


Figura 2.3
Gráfica circular de costos, ejemplo 2.3.

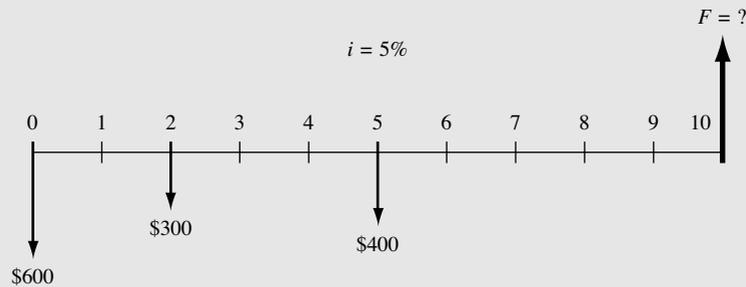


Figura 2.4
Diagrama para un valor futuro en el año 10, ejemplo 2.3.

Solución

Dibuje el diagrama de flujo de efectivo para los valores \$600, \$300 y \$400 desde la perspectiva del ingeniero (figura 2.4). Use factores F/P para encontrar F en el año 10.

$$\begin{aligned} F &= 600(F/P, 5\%, 10) + 300(F/P, 5\%, 8) + 400(F/P, 5\%, 5) \\ &= 600(1.6289) + 300(1.4775) + 400(1.2763) \\ &= \$1\,931.11 \end{aligned}$$

El problema también puede resolverse encontrando el valor presente en el año 0 de los costos \$300 y \$400 con los factores P/F , y luego determinando el valor futuro del total en el año 10.

$$\begin{aligned} P &= 600 + 300(P/F, 5\%, 2) + 400(P/F, 5\%, 5) \\ &= 600 + 300(0.9070) + 400(0.7835) \\ &= \$1\,185.50 \\ F &= 1\,185.50(F/P, 5\%, 10) = 1\,185.50(1.6289) \\ &= \$1\,931.06 \end{aligned}$$

Comentario

Debe ser evidente que existen diversas maneras de enfrentar el problema, puesto que puede utilizarse cualquier año para encontrar el total equivalente de los costos antes de encontrar el valor futuro en el año 10. Como ejercicio, resuelva el problema usando el año 5 para el total equivalente y luego determine la cantidad total en el año 10. Todas las respuestas deberán ser iguales, salvo por cierto error de redondeo.

2.2 FACTORES DE VALOR PRESENTE Y DE RECUPERACIÓN DE CAPITAL EN SERIES UNIFORMES (P/A Y A/P)

El valor presente P equivalente de una serie uniforme A de flujo de efectivo al final del periodo se muestra en la figura 2.5a. Puede determinarse una expresión para el

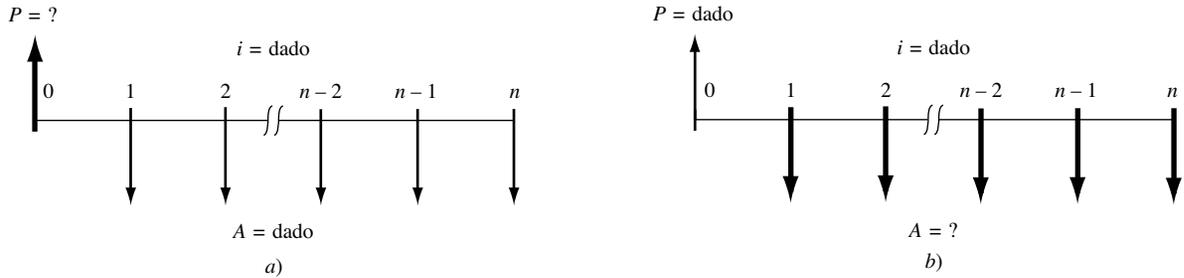


Figura 2.5

Diagramas de flujo de efectivo para determinar a) P de una serie uniforme y b) A para un valor presente.

valor presente considerando cada valor de A como un valor futuro F , calculando su valor presente con el factor P/F para luego sumar los resultados:

$$P = A \left[\frac{1}{(1+i)^1} \right] + A \left[\frac{1}{(1+i)^2} \right] + A \left[\frac{1}{(1+i)^3} \right] + \dots + A \left[\frac{1}{(1+i)^{n-1}} \right] + A \left[\frac{1}{(1+i)^n} \right]$$

Los términos entre corchetes representan los factores P/F durante los años 1 hasta n , respectivamente. Si se factoriza A ,

$$P = A \left[\frac{1}{(1+i)^1} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \dots + \frac{1}{(1+i)^{n-1}} + \frac{1}{(1+i)^n} \right] \quad [2.4]$$

Para simplificar la ecuación [2.4] y obtener el factor P/A , multiplique esta ecuación por el factor $(P/F, i\%, 1)$, el cual es $1/(1+i)$. Esto da como resultado la ecuación [2.5] que se presenta más abajo. Luego reste la ecuación [2.4] de la ecuación [2.5] y simplifique para obtener la expresión para P cuando $i \neq 0$ (ecuación [2.6]). Esta progresión es como sigue.

$$\frac{P}{1+i} = A \left[\frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \frac{1}{(1+i)^4} + \dots + \frac{1}{(1+i)^n} + \frac{1}{(1+i)^{n+1}} \right] \quad [2.5]$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+i} P &= A \left[\frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \dots + \frac{1}{(1+i)^n} + \frac{1}{(1+i)^{n+1}} \right] \\ -P &= A \left[\frac{1}{(1+i)^1} + \frac{1}{(1+i)^2} + \dots + \frac{1}{(1+i)^{n-1}} + \frac{1}{(1+i)^n} \right] \end{aligned}$$

$$\frac{-i}{1+i} P = A \left[\frac{1}{(1+i)^{n+1}} - \frac{1}{(1+i)^1} \right]$$

$$P = \frac{A}{-i} \left[\frac{1}{(1+i)^n} - 1 \right]$$

$$P = A \left[\frac{(1+i)^n - 1}{n(1+i)^n} \right] \quad i \neq 0 \quad [2.6]$$

El término entre corchetes en la ecuación [2.6] es el factor de conversión referido como *factor de valor presente de serie uniforme* (FVPSU). Se trata del factor P/A utilizado para calcular el valor P equivalente en el año 0 para una serie uniforme de final de periodo de valores A , que empiezan al final del periodo 1 y se extienden durante n periodos. El diagrama de flujo de efectivo es la figura 2.5a.

Para invertir la situación, se conoce el valor presente P y se busca la cantidad equivalente A de serie uniforme (figura 2.5b). El primer valor A ocurre al final del periodo 1, es decir, un periodo después de que P ocurre. Despeje A de la ecuación [2.6] para llegar a

$$A = P \left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right] \quad [2.7]$$

El término entre corchetes se denomina *factor de recuperación del capital* (FRC), o *factor A/P* . Con él se calcula el valor anual uniforme equivalente A durante n años de una P dada en el año 0, cuando la tasa de interés es i .

Estas fórmulas se derivan con el valor presente P y la primera cantidad anual uniforme A , con un año (o un periodo) de diferencia. Es decir, el valor presente P siempre debe localizarse un periodo antes de la primera A .

Los factores y su uso para encontrar P y A se resumen en la tabla 2.2, y en los forros interiores. Las notaciones estándar para estos dos factores son $(P/A, i\%, n)$ y $(A/P, i\%, n)$. Las tablas 1 a 29 al final del libro incluyen los valores de los factores. Como por ejemplo, si $i = 15\%$ y $n = 25$ años, el valor del factor P/A que registra en la tabla 19 es $(P/A, 15\%, 25) = 6.4641$. Esto encontrará el valor presente equivalente a 15% anual, para cualquier cantidad A que ocurra de manera uniforme desde el año 1 hasta el 25. Cuando la relación entre corchetes en la ecuación [2.6] se utiliza para calcular el factor P/A , el resultado es el mismo a excepción de ciertos errores de redondeo.

$$(P/A, 15\%, 25) = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} = \frac{(1.15)^{25} - 1}{0.15(1.15)^{25}} = \frac{31.91895}{4.93784} = 6.46415$$

TABLA 2.2 Factores P/A y A/P : notación y ecuaciones

Factor		Encontrar /dado	Fórmula del factor	Ecuación en notación estándar	Funciones de Excel
Notación	Nombre				
$(P/A, i, n)$	Series uniformes de valor presente	P/A	$\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$	$P = A(P/A, i, n)$	$PV(i\%, n, A)$
$(A/P, i, n)$	Recuperación de capital	A/P	$\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$	$A = P(A/P, i, n)$	$PMT(i\%, n, P)$

Las funciones de hoja de cálculo son capaces de calcular los valores P y A en vez de aplicar los factores P/A y A/P . La función VP que usamos en la sección anterior también calcula el valor P para una A dada a lo largo de n años, y un valor F en el año n , si se da éste. El formato, que se presenta en la sección 1.8, es

$$VP(i\%,n,A,F)$$

De manera similar, el valor A se determina utilizando la función PAGO para un valor P dado en el año 0 y una F aparte, si está dada. El formato es

$$PAGO(i\%,n,P,F)$$

La función PAGO se demostró en la sección 1.18 (figura 1.5b) y se usa en ejemplos posteriores. La tabla 2.2 incluye funciones VP y PAGO para P y A , respectivamente. El ejemplo 2.4 demuestra la función VP.



EJEMPLO 2.4

¿Cuánto dinero debería destinarse para pagar ahora por \$600 garantizados cada año durante 9 años, comenzando el próximo año, a una tasa de rendimiento de 16% anual?

Solución

El diagrama de flujo de efectivo (figura 2.6) se ajusta al factor P/A . El valor presente es:

$$P = 600(P/A, 16\%, 9) = 600(4.6065) = \$2\,763.90$$

La función $VP(16\%, 9, 600)$ ingresada en una celda de una hoja de cálculo desplegará la respuesta $P = \$2\,763.93$.

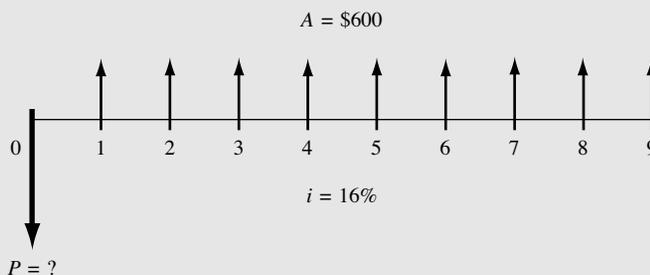


Figura 2.6

Diagrama para encontrar P usando el factor P/A , ejemplo 2.4.

Comentario

Otro método de solución consiste en utilizar los factores P/F para cada uno de los nueve pagos y agregar los valores presentes resultantes, para obtener la respuesta correcta. Otra forma es calcular el valor futuro F de los pagos de \$600 y luego encontrar el valor presente del valor F . Existen diversas formas de resolver un problema de ingeniería económica. Aquí sólo se presentan los métodos más directos.



2.3 DERIVACIÓN DEL FACTOR DE FONDO DE AMORTIZACIÓN Y EL FACTOR DE CANTIDAD COMPUESTA SERIE UNIFORME (A/F Y F/A)

La forma más simple de derivar el factor A/F consiste en sustituirlo en aquellos ya desarrollados. Por lo tanto, si P de la ecuación [2.3] se sustituye en la ecuación [2.7] resulta la siguiente fórmula:

$$A = F \left[\frac{1}{(1+i)^n} \right] \left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right]$$

$$A = F \left[\frac{i}{(1+i)^n - 1} \right] \quad [2.8]$$

La expresión entre corchetes de la ecuación [2.8] es el factor de fondo de amortización o A/F , el cual determina la serie de valor anual uniforme que sería equivalente a un valor futuro determinado F , lo cual se muestra gráficamente en la figura 2.7a.

La serie uniforme A se inicia al final del periodo 1 y continúa a lo largo del periodo de la F dada.

La ecuación [2.8] puede reordenarse para encontrar F para una serie A dada en los periodos 1 a n (figura 2.7b).

$$F = A \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] \quad [2.9]$$

El término entre corchetes se denomina el *factor de cantidad compuesta, serie uniforme* (FCCSU), o factor F/A . Cuando se multiplica por la cantidad anual uniforme A dada, produce el valor futuro de la serie uniforme. Es importante recordar que la cantidad futura F ocurre durante el mismo periodo que la última A .

La notación estándar sigue la misma forma que la de los otros factores. Éstas son $(F/A, i, n)$ y $(A/F, i, n)$. La tabla 2.3 resume las notaciones y las ecuaciones, que también se encuentran en los forros interiores de este libro. Las tablas 1 a 29 incluyen valores de los factores F/A y A/F .

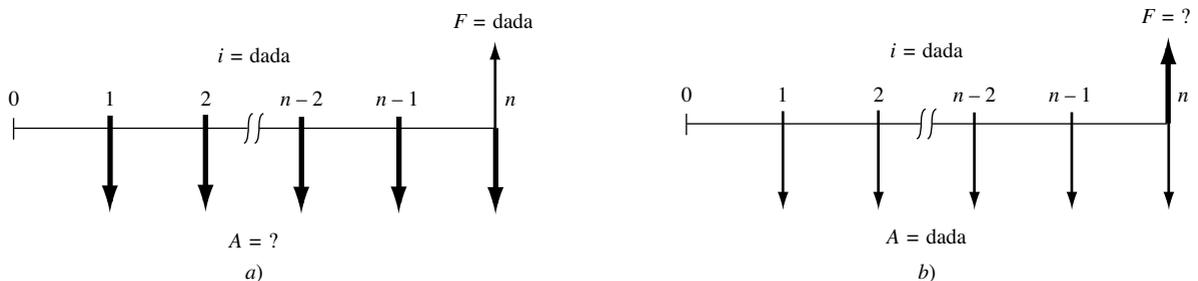


Figura 2.7

Diagramas de flujo de efectivo para a) determinar A dada F , y b) determinar F dada A .

TABLA 2.3 Factores F/A y A/F : notación y ecuaciones

Factor		Encontrar /dado	Fórmula del factor	Ecuación en notación estándar	Funciones de Excel
Notación	Nombre				
$(F/A, i, n)$	Cantidad compuesta serie uniforme	F/A	$\frac{(1+i)^n - 1}{i}$	$F = A(F/A, i, n)$	$VF(i\%, n, A)$
$(A/F, i, n)$	Fondo de amortización	A/F	$\frac{i}{(1+i)^n - 1}$	$A = F(A/F, i, n)$	$PAGO(i\%, n, F)$

Los factores de series uniformes se determinan simbólicamente mediante el uso de una forma de factor abreviada. Por ejemplo, $F/A = (F/P)(P/A)$, donde la cancelación de la P es correcta. Usando las fórmulas de factor se obtiene

$$(F/A, i, n) = [(1+i)^n] \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \right] = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

El factor A/F en la ecuación [2.8] también puede derivarse a partir del factor A/P si se resta la i .

$$(A/F, i, n) = (A/P, i, n) - i$$

Esta relación se verifica de manera empírica en cualquier tabla del factor de interés en la parte final del texto, o matemáticamente si se simplifica la ecuación para derivar la fórmula del factor A/F . Esta relación se emplea más adelante para comparar alternativas con el método del valor anual.

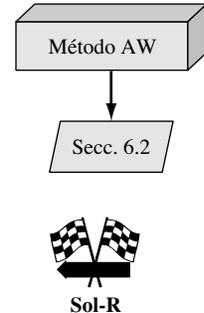
Para la solución por computadora, la función VF de la hoja de cálculo determina F para una serie A dada durante n años. El formato es

$$VF(i\%, n, A, P)$$

La P puede omitirse cuando no se da por separado algún valor presente. La función PAGO determina el valor A para n años, dado F en el año n y posiblemente un valor P por separado en el año 0. El formato es

$$PAGO(i\%, n, P, F)$$

Si P se omite, se debe ingresar la coma para que la computadora sepa que la última entrada es un valor F . Tales funciones se incluyen en la tabla 2.3. Los siguientes dos ejemplos incluyen las funciones VF y PAGO.



EJEMPLO 2.5

Formasa Plastics tiene grandes plantas de fabricación en Texas y Hong Kong. Su presidente quiere saber el valor futuro equivalente de una inversión de capital de \$1 millón cada año durante 8 años, empezando un año a partir de ahora. El capital de Formasa gana a una tasa del 14% anual.

**Solución**

El diagrama de flujo de efectivo (figura 2.8) muestra los pagos anuales que inician al final del año 1 y terminan en el año en que se desea calcular el valor futuro. Los flujos de efectivo se indican en unidades de \$1 000. El valor F en 8 años es

$$F = 1\,000(F/A, 14\%, 8) = 1\,000(13.2328) = \$13\,232.80$$

El valor futuro real será \$13 232 800. La función es VF(14%,8,1000000).

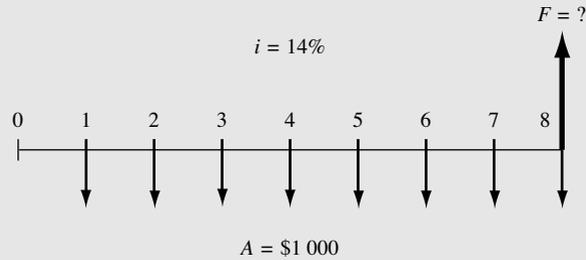
**Figura 2.8**

Diagrama para calcular F en una serie uniforme, ejemplo 2.5.

EJEMPLO 2.6

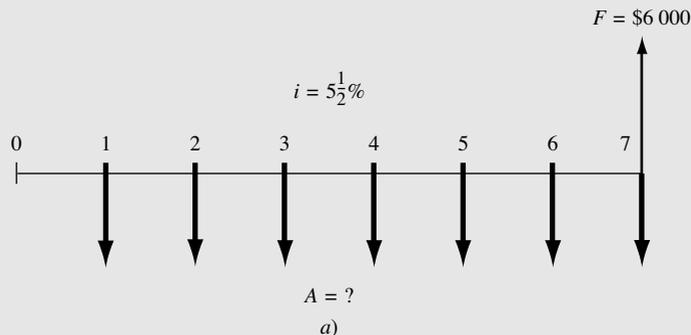
¿Cuánto dinero necesita depositar Carol cada año, empezando un año a partir de ahora, a $5\frac{1}{2}\%$ por año, para que pueda acumular \$6 000 en siete años?

Solución

El diagrama de flujo de efectivo desde la perspectiva de Carol (figura 2.9a) se ajusta al factor A/F .

$$A = \$6\,000(A/F, 5.5\%, 7) = 6\,000(0.12096) = \$725.76 \text{ por año}$$

El valor del factor A/F de 0.12096 se calculó utilizando la fórmula del factor de la ecuación [2.8]. De manera alternativa, use la función PAGO como se muestra en la figura 2.9b para obtener $A = \$725.79$ por año.

**Figura 2.9**

a) Diagrama de flujo de efectivo y b) función PAGO para calcular A , ejemplo 2.6.

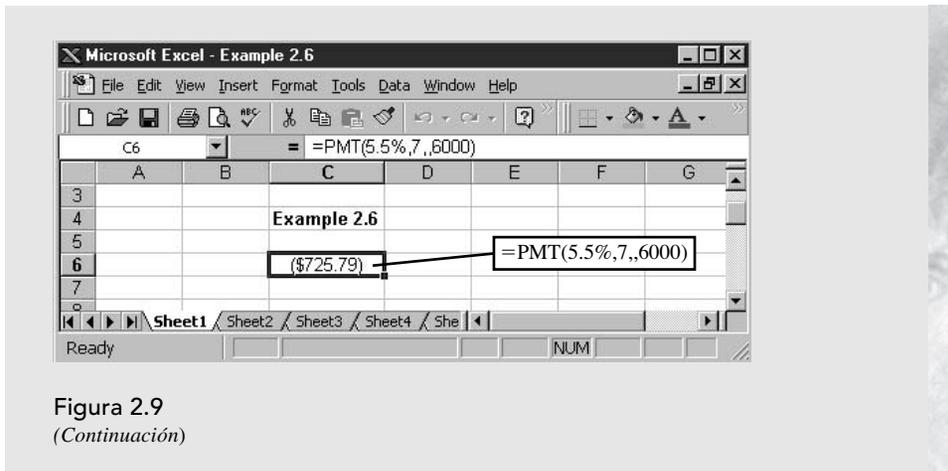


Figura 2.9
(Continuación)

2.4 INTERPOLACIÓN EN TABLAS DE INTERÉS

Cuando es necesario localizar el valor de un factor i o n que no se encuentra en las tablas de interés, el valor deseado puede obtenerse en una de dos formas: **1.** utilizando las fórmulas derivadas de las secciones 2.1 a 2.3, o bien, **2.** interpolando linealmente entre los valores tabulados. En general, es más fácil y más rápido emplear las fórmulas de una calculadora u hoja de cálculo que ya las tiene preprogramadas. Además, el valor obtenido a través de la interpolación lineal no es exactamente el valor correcto, ya que las ecuaciones son no lineales. Sin embargo, la interpolación resulta suficiente en la mayoría de los casos siempre y cuando los valores de i o n no estén muy distantes entre sí.

El primer paso en la interpolación lineal consiste en establecer los factores conocidos (valores 1 y 2) y desconocidos, como se muestra en la tabla 2.4. Se escribe entonces una ecuación de razones y se despeja para c , de la siguiente manera:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{o} \quad c = \frac{a}{b}d \quad [2.10]$$

donde a , b , c y d representan las diferencias entre los números que se muestran en las tablas de interés. El valor de c de la ecuación [2.10] se suma o se resta del valor 1, dependiendo de si el valor del factor está aumentando o disminuyendo, respectivamente. Los siguientes ejemplos ilustran el procedimiento recién descrito.

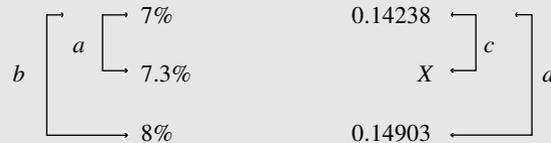
TABLA 2.4 Arreglo para la interpolación lineal	
i o n	Factor
b <div style="display: inline-block; vertical-align: middle;"> $\left[\begin{array}{l} a \\ \left[\begin{array}{l} \text{tabulado} \\ \text{deseado} \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{l} \text{tabulado} \end{array} \right] \end{array} \right.$ </div>	<div style="display: inline-block; vertical-align: middle;"> $\left[\begin{array}{l} \text{valor 1} \\ \text{no listado} \\ \text{valor 2} \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} c \\ d \end{array} \right]$ </div>

EJEMPLO 2.7

Determine el valor del factor A/P para una tasa de interés de 7.3% y n de 10 años, es decir, $(A/P, 7.3\%, 10)$.

Solución

Los valores del factor A/P para tasas de interés de 7 y 8% y $n = 10$ se indican en las tablas 12 y 13, respectivamente.



La variable desconocida X es el valor deseado del factor. De acuerdo con la ecuación [2.10],

$$\begin{aligned} c &= \left(\frac{7.3 - 7}{8 - 7} \right) (0.14903 - 0.14238) \\ &= \frac{0.3}{1} (0.00665) = 0.00199 \end{aligned}$$

Puesto que el valor del factor está aumentando conforme la tasa de interés se incrementa de 7 a 8%, el valor de c debe *agregarse* al valor del factor de 7%. Así,

$$X = 0.14238 + 0.00199 = 0.14437$$

Comentario

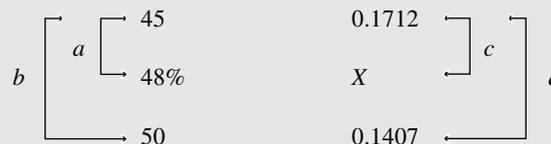
Se considera una buena práctica verificar lo razonable de la respuesta final comprobando que X se encuentre *entre* los valores de los factores conocidos en las proporciones correctas aproximadamente. En este caso, ya que 0.14437 es menor que 0.5 de la distancia entre 0.14238 y 0.14903, la respuesta parece razonable. Si se aplica la ecuación [2.7], el valor exacto del factor es 0.144358.

EJEMPLO 2.8

Determine el valor del factor $(P/F, 4\%, 48)$.

Solución

De acuerdo con la tabla 9 para un interés del 4%, los valores del factor P/F para 45 y 50 años se calcula de la siguiente manera:



Según la ecuación [2.10],

$$c = \frac{a}{b}(d) = \frac{48 - 45}{50 - 45} (0.1712 - 0.1407) = 0.0183$$

Puesto que el valor del factor disminuye conforme n aumenta, c se resta del valor del factor para $n = 45$.

$$X = 0.1712 - 0.0183 = 0.1529$$

Comentario

Aunque es posible realizar interpolaciones lineales por dos vías, es mucho más sencillo y más preciso utilizar la fórmula del factor o una función de hoja de cálculo.

2.5 FACTORES DE GRADIENTE ARITMÉTICO (P/G Y A/G)

Un *gradiente aritmético* es una *serie de flujos de efectivo* que aumenta o disminuye en una cantidad constante. Es decir, el flujo de efectivo, ya sea ingreso o desembolso, cambia por la misma cantidad aritmética cada periodo. La *cantidad* del aumento o de la disminución es el *gradiente*. Por ejemplo, si un ingeniero industrial predice que el costo del mantenimiento de un robot aumentará en \$ 500 anuales hasta que la máquina se desecha, hay una serie gradiente relacionada y la cantidad del gradiente es \$500.

Las fórmulas desarrolladas anteriormente para una serie A tienen cantidades de final de año de igual valor. En el caso de un gradiente, el flujo de efectivo de cada final de año es diferente, de manera que es preciso derivar nuevas fórmulas. Primero suponga que el flujo de efectivo al final del año 1 no forma parte de la serie del gradiente, sino que es una *cantidad base*. Esto es conveniente porque en las aplicaciones reales la cantidad base en general es mayor o menor que el aumento o la disminución del gradiente. Por ejemplo, si una persona compra un automóvil usado con una garantía de un año, se podría esperar que durante el primer año de operación tuviera que pagar tan sólo la gasolina y el seguro. Suponga que dicho costo es \$1 500; es decir, \$1 500 es la cantidad base. Después del primer año, la persona tendría que solventar el costo de las reparaciones, y razonablemente se esperaría que tales costos aumentaran cada año. Si se estima que los costos totales aumentarán en \$50 cada año, la cantidad al segundo año sería \$1 550, al tercero, \$1 600, y así sucesivamente hasta el año n , cuando el costo total sería \$1 550 + $(n - 1)50$. El diagrama de flujo de efectivo para esta operación se muestra en la figura 2.10. Observe que el gradiente (\$50) aparece por primera vez entre los años 1 y 2, y la cantidad base no es igual al gradiente.

El símbolo G para los gradientes se define como:

G = cambio aritmético constante en la magnitud de los ingresos o desembolsos de un periodo al siguiente; G puede ser positivo o negativo.

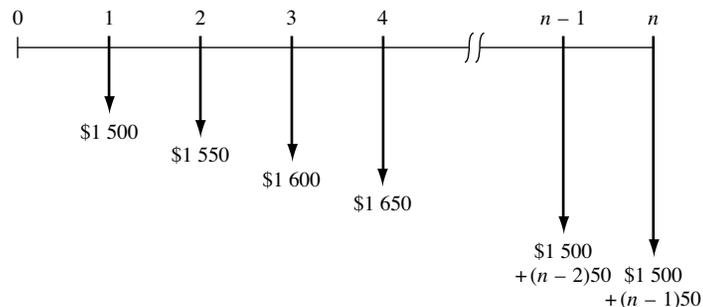
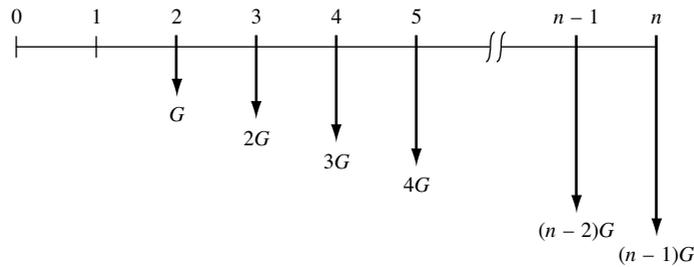


Figura 2.10
Diagrama de una serie gradiente aritmético con una cantidad base de \$1 500 y un gradiente de \$50.

Figura 2.11
Serie gradiente aritmético convencional sin la cantidad base.



El flujo de efectivo en el año n (CF_n) se calcula como

$$CF_n = \text{cantidad base} + (n - 1)G$$

Si se ignora la cantidad base, se puede construir un diagrama de flujo de efectivo generalizado de gradiente aritmético (creciente), como se muestra en la figura 2.11. Observe que el gradiente empieza entre los años 1 y 2. A éste se le denomina *gradiente convencional*.

EJEMPLO 2.9

Una compañía de ropa deportiva ha iniciado un programa para registrar su logo. Espera obtener ingresos de \$80 000 por derechos el próximo año por la venta de su logo. Se espera que los ingresos por derechos se incrementen de manera uniforme hasta un nivel de \$200 000 en 9 años. Determine el gradiente aritmético y construya el diagrama de flujo de efectivo.

Solución

La cantidad base es \$80 000 y el aumento total de ingresos es

$$\text{Aumento en 9 años} = 200\,000 - 80\,000 = 120\,000$$

$$\begin{aligned} \text{Gradiente} &= \frac{\text{aumento}}{n-1} \\ &= \frac{120\,000}{9-1} = \$15\,000 \text{ por año} \end{aligned}$$

El diagrama de flujo de efectivo se muestra en la figura 2.12.

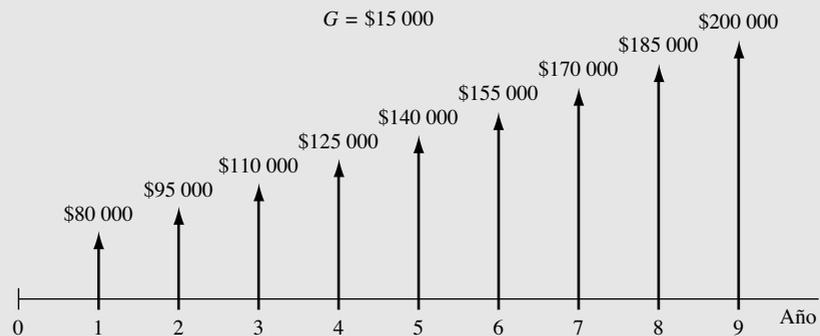


Figura 2.12

Diagrama para la serie gradiente, ejemplo 2.9.

En el presente texto se derivan tres factores para los gradientes aritméticos: el factor P/G para el valor presente, el factor A/G para serie anual y el factor F/G para el valor futuro. Existen varias formas para derivarlos. Aquí se usa el factor de valor presente con pago único ($P/F, i, n$); aunque se llega al mismo resultado utilizando los factores F/P , F/A o P/A .

En la figura 2.11 el valor presente en el año 0 sólo del gradiente es igual a la suma de los valores presentes de los pagos individuales, donde cada valor se considera como una cantidad futura.

$$P = G(P/F, i, 2) + 2G(P/F, i, 3) + 3G(P/F, i, 4) + \dots \\ + [(n-2)G](P/F, i, n-1) + [(n-1)G](P/F, i, n)$$

Factorice G y aplique la fórmula P/F :

$$P = G \left[\frac{1}{(1+i)^2} + \frac{2}{(1+i)^3} + \frac{3}{(1+i)^4} + \dots + \frac{n-2}{(1+i)^{n-1}} + \frac{n-1}{(1+i)^n} \right] \quad [2.11]$$

Al multiplicar ambos lados de la ecuación [2.11] por $(1+i)^1$ se obtiene:

$$P(1+i)^1 = G \left[\frac{1}{(1+i)^1} + \frac{2}{(1+i)^2} + \frac{3}{(1+i)^3} + \dots + \frac{n-2}{(1+i)^{n-2}} + \frac{n-1}{(1+i)^{n-1}} \right] \quad [2.12]$$

Reste la ecuación [2.11] de la ecuación [2.12] y simplifique

$$iP = G \left[\frac{1}{(1+i)^1} + \frac{1}{(1+i)^2} + \dots + \frac{1}{(1+i)^{n-1}} + \frac{1}{(1+i)^n} \right] - G \left[\frac{n}{(1+i)^n} \right] \quad [2.13]$$

La expresión entre corchetes que se encuentra a la izquierda es la misma que la que se presenta en la ecuación [2.4], donde se derivó el factor P/A . Sustituya la forma cerrada del factor P/A de la ecuación [2.6] en la ecuación [2.13] y despeje P para obtener una relación simplificada.

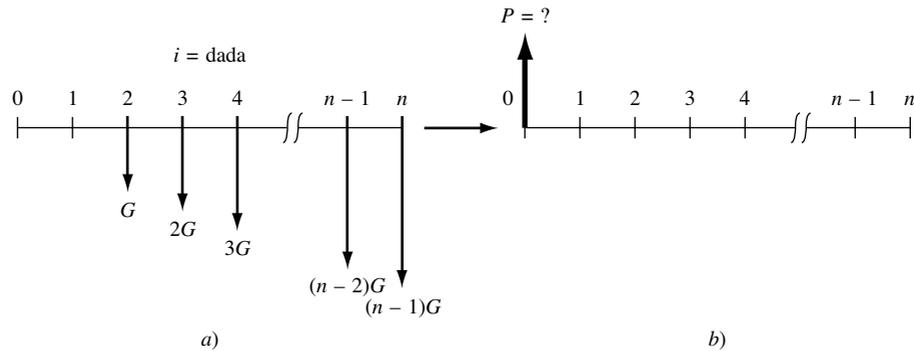
$$P = \frac{G}{i} \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n} \right] \quad [2.14]$$

La ecuación [2.14] es la relación general para convertir un gradiente aritmético G (sin incluir la cantidad base) para n años en un valor presente en el año 0. La figura 2.13a se convierte en el flujo de efectivo equivalente que se indica en la figura 2.13b. El *factor de valor presente de gradiente aritmético*, o *factor P/G* , se expresa en dos formas distintas:

$$(P/G, i, n) = \frac{1}{i} \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n} \right] \\ \text{o} \quad (P/G, i, n) = \frac{(1+i)^n - in - 1}{i^2(1+i)^n} \quad [2.15]$$

Figura 2.13

Diagrama de conversión de un gradiente aritmético a un valor presente.



Recuerde: el gradiente empieza en el año 2 y P está ubicado en el año 0. La ecuación [2.14], expresada como una relación de ingeniería económica, tiene la siguiente forma:

$$P = G(P/G, i, n) \quad [2.16]$$

La serie anual uniforme equivalente (valor A) de un gradiente aritmético G se calcula multiplicando el valor presente de la ecuación [2.16] por la expresión del factor $(A/P, i, n)$. En forma de notación estándar, el equivalente de la cancelación algebraica de P se utiliza para obtener el factor $(A/G, i, n)$.

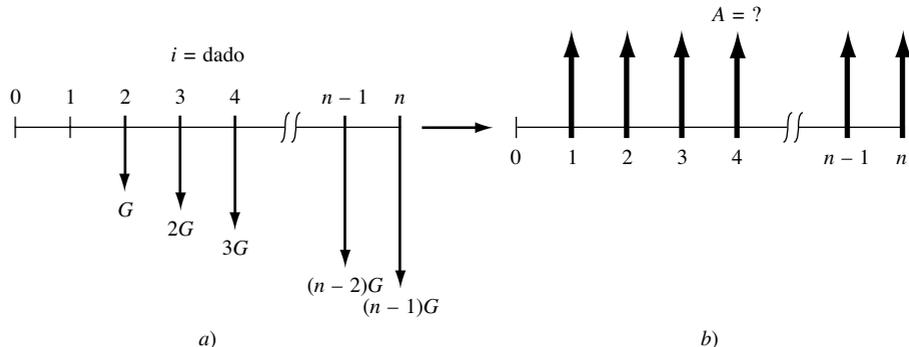
$$\begin{aligned} A &= G(P/G, i, n)(A/P, i, n) \\ &= G(A/G, i, n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{G}{i} \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n} \right] \left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right] \\ &= G \left[\frac{1}{i} - \frac{n}{(1+i)^n - 1} \right] \end{aligned} \quad [2.17]$$

La expresión entre corchetes en la ecuación [2.17] se denomina el *factor de gradiente aritmético de una serie uniforme* y se identifica por $(A/G, i, n)$. Este factor convierte la figura 2.14a en la figura 2.14b.

Figura 2.14

Diagrama de conversión de una serie gradiente aritmético a una serie anual uniforme equivalente.



Los factores P/G y A/G y las relaciones se resumen en el forro interior de la portada. Los valores de los factores se tabulan en las dos columnas situadas más a la derecha en las tablas de factores 1 a 29, al final de este libro.

No existe una función directa de celda individual en una hoja de cálculo para determinar P o A con un gradiente aritmético. Utilice la función VNP para P , y la función PAGO para A , después de que todos los flujos de efectivo se ingresen en las celdas. (El uso de las funciones VNP y PAGO para este tipo de series de flujo de efectivo se analizan en el capítulo 3.)

Se puede derivar un factor F/G (*factor gradiente aritmético, valor futuro*) al multiplicar los factores P/G y F/P . El factor resultante, $(F/G, i, n)$, entre corchetes, y la relación de ingeniería económica son

$$F = G \left[\left(\frac{1}{i} \right) \left(\frac{(1+i)^n - 1}{i} - n \right) \right]$$

El valor presente total P_T para una serie gradiente debe considerarse por separado la base y el gradiente. En consecuencia, para series de flujo de efectivo que impliquen gradientes convencionales:

- La *cantidad base* es la cantidad A de serie uniforme que empieza en el año 1 y se extiende hasta el año n . Su valor presente se simboliza con P_A .
- Para un gradiente creciente, la *cantidad gradiente* debe agregarse a la cantidad de la serie uniforme. El valor presente es P_G .
- Para un gradiente decreciente, la cantidad gradiente debe restarse de la cantidad de la serie uniforme. El valor presente es $-P_G$.

Las ecuaciones generales para calcular el valor presente total P_T de los gradientes aritméticos convencionales son

$$P_T = P_A + P_G \quad \text{y} \quad P_T = P_A - P_G \quad [2.18]$$

De manera similar, las series anuales totales equivalentes son

$$A_T = A_A + A_G \quad \text{y} \quad A_T = A_A - A_G \quad [2.19]$$

donde A_A es la cantidad base anual y A_G es la cantidad anual equivalente de la serie gradiente.

EJEMPLO 2.10

Tres condados adyacentes en Florida acordaron emplear recursos fiscales ya destinados para remodelar los puentes mantenidos por el condado. En una junta reciente, los ingenieros de los condados estimaron que, al final del próximo año, se depositará un total de \$500 000 en una cuenta para la reparación de los viejos puentes de seguridad dudosa que se encuentran en los tres condados. Además, estiman que los depósitos aumentarán en \$100 000 por año durante 9 años a partir de ese momento, y luego cesarán. Determine las cantidades equivalentes de *a*) valor presente y de *b*) serie anual, si los fondos del condado ganan intereses a una tasa del 5% anual.



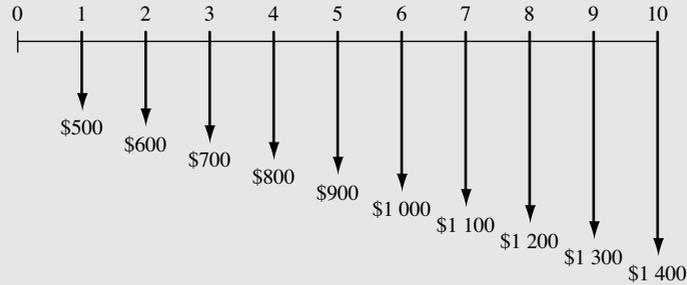


Figura 2.15

Serie de flujos de efectivo con un gradiente aritmético convencional (en unidades de \$1 000), ejemplo 2.10.

Solución

- a) El diagrama de flujo de efectivo desde la perspectiva del condado se muestra en la figura 2.15. Se deben realizar dos cálculos y luego se tiene que sumar: el primero para el valor presente de la cantidad base P_A , y el segundo para el valor presente del gradiente P_G . El valor presente total P_T ocurre en el año 0, lo cual se indica mediante la partición del diagrama de flujo de efectivo de la figura 2.16. En unidades de \$1 000, el valor presente, a partir de la ecuación [2.18] es

$$\begin{aligned} P_T &= 500(P/A, 5\%, 10) + 100(P/G, 5\%, 10) \\ &= 500(7.7217) + 100(31.652) \\ &= \$7\,026.05 \quad (\$7\,026\,050) \end{aligned}$$

- b) También aquí es necesario considerar por separado al gradiente y a la cantidad base. La serie anual total A_T se encuentra usando la ecuación [2.19].

$$\begin{aligned} A_T &= 500 + 100(A/G, 5\%, 10) = 500 + 100(4.0991) \\ &= \$909.91 \text{ por año } (\$909\,910) \end{aligned}$$

Y A_T ocurre desde el año 1 hasta el año 10.

Comentario

Recuerde: los factores P/G y A/G determinan el valor presente y la serie anual *sólo del gradiente*. Cualquier otro flujo de efectivo debe considerarse por separado.

Si el valor presente ya está calculado [como en el inciso a)], P_T puede multiplicarse por el factor A/P apropiado para obtener A_T .

$$\begin{aligned} A_T &= P_T(A/P, 5\%, 10) = 7\,026.05(0.12950) \\ &= \$909.87 \quad (\$909\,870) \end{aligned}$$

El redondeo explica la diferencia de \$40.

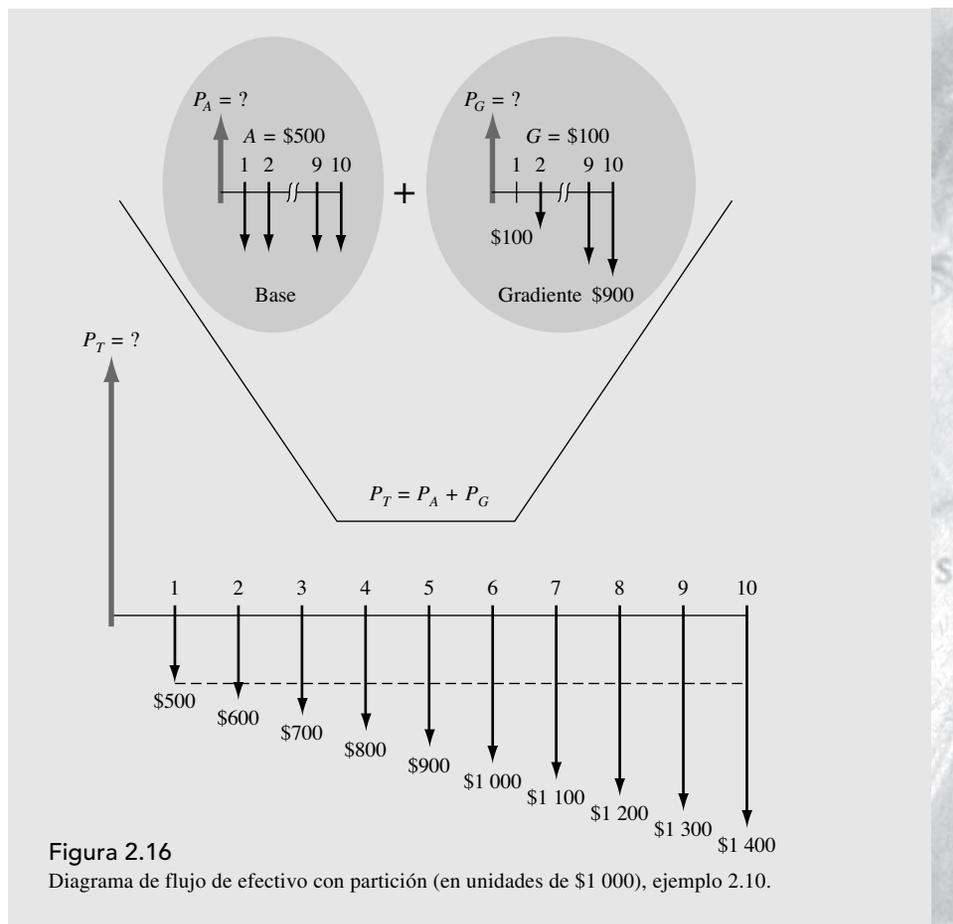


Figura 2.16

Diagrama de flujo de efectivo con partición (en unidades de \$1 000), ejemplo 2.10.

Ejemplo adicional 2.16.**2.6 FACTORES PARA SERIES GRADIENTE GEOMÉTRICO**

Es común que las series de flujo de efectivo, tales como los costos de operación, los costos de construcción y los ingresos, aumenten o disminuyan de un periodo a otro mediante un *porcentaje constante*, por ejemplo, 5% anual. Esta tasa de cambio uniforme define una *serie gradiente geométrico* de flujos de efectivo. Además de los símbolos i y n utilizados hasta el momento, ahora se necesita el término

g = tasa de cambio constante, en forma decimal, mediante la cual las cantidades aumentan o disminuyen de un periodo al siguiente

La figura 2.17 presenta diagramas de flujo de efectivo para series gradiente geométrico con tasas uniformes de aumento o disminución. La serie empieza en el año 1 a

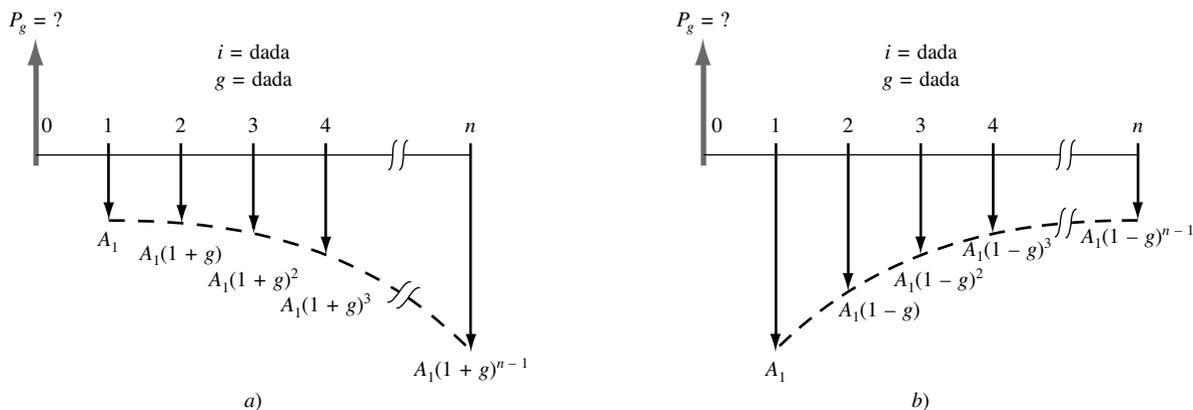


Figura 2.17

Diagrama de flujo de efectivo de una serie gradiente geométrico a) creciente y b) decreciente y valor presente P_g .

una cantidad inicial A_1 , la cual *no* se considera una cantidad base, como en el gradiente aritmético. La relación para determinar el valor presente total P_g para toda la serie de flujo de efectivo puede derivarse al multiplicar cada flujo de efectivo en la figura 2.17a por el factor P/F : $1/(1+i)^n$.

$$\begin{aligned}
 P_g &= \frac{A_1}{(1+i)^1} + \frac{A_1(1+g)}{(1+i)^1} + \frac{A_1(1+g)^2}{(1+i)^3} + \dots + \frac{A_1(1+g)^{n-1}}{(1+i)^n} \\
 &= A_1 \left[\frac{1}{1+i} + \frac{1+g}{(1+i)^2} + \frac{(1+g)^2}{(1+i)^3} + \dots + \frac{(1+g)^{n-1}}{(1+i)^n} \right] \quad [2.20]
 \end{aligned}$$

Se multiplican ambos lados por $(1+g)/(1+i)$, se resta la ecuación [2.20] del resultado, se factoriza P_g y se obtiene:

$$P_g \left(\frac{1+g}{1+i} - 1 \right) = A_1 \left[\frac{(1+g)^n}{(1+i)^{n+1}} - \frac{1}{1+i} \right]$$

Se despeja P_g y se simplifica.

$$P_g = A_1 \left(\frac{1 - \left(\frac{1+g}{1+i} \right)^n}{i - g} \right) \quad g \neq i \quad [2.21]$$

El término entre corchetes en la ecuación [2.21] es el factor de valor presente de la serie gradiente geométrico para valores de g que no son iguales a la tasa de interés i . La notación estándar usada es $(P/A, g, i, n)$. Cuando $g = i$, sustituya i por g en la ecuación [2.20] para obtener

$$P_g = A_1 \left(\frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)} + \dots + \frac{1}{(1+i)} \right)$$

El término $1/(1+i)$ aparece n veces, de modo que

$$P_g = \frac{nA_1}{(1+i)} \quad [2.22]$$

En resumen, la relación de ingeniería económica y las fórmulas de factor para calcular P_g en el periodo $t = 0$ para una serie gradiente geométrico que inicia en el periodo 1 en la cantidad A_1 y aumenta por una tasa constante de g cada periodo, son

$$P_g = A_1(P/A, g, i, n) \quad [2.23]$$

$$(P/A, g, i, n) = \begin{cases} \frac{1 - \left(\frac{1+g}{1+i}\right)^n}{i+g} & g \neq i \\ \frac{n}{1+i} & g = i \end{cases} \quad [2.24]$$

Es posible derivar factores para los valores equivalentes de A y F ; sin embargo, es más fácil determinar la cantidad P_g y luego multiplicarla por los factores A/P o F/P .

Como con las series de gradiente aritmético, en las hojas de cálculo no existen funciones directas para las series gradiente geométrico. Una vez que se han ingresado los flujos de efectivo, P y A se determinan usando las funciones VPN y PAGO, respectivamente. Sin embargo, siempre es una opción desarrollar en la hoja de cálculo una función que utilice la ecuación del factor para determinar un valor de P , F o A . En el ejemplo 2.11 se demuestra este enfoque para encontrar el valor presente de una serie gradiente geométrico con las ecuaciones [2.24].

EJEMPLO 2.11

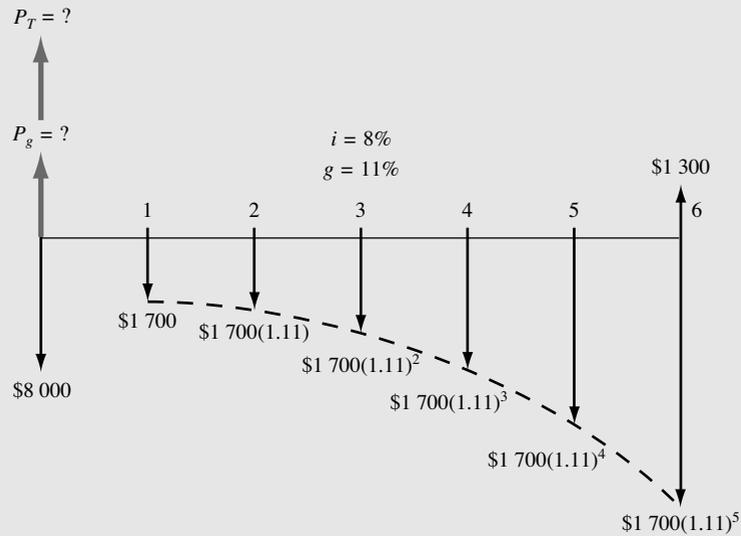
Los ingenieros del SeaWorld, una división de Busch Gardens, Inc., desarrollaron una innovación en un deporte acuático existente para hacerlo más excitante. La modificación cuesta sólo \$8 000 y se espera que dure 6 años con un valor de salvamento de \$1 300 para el mecanismo solenoide. Se espera que el costo de mantenimiento sea de \$1 700 el primer año, y que aumente 11% anual en lo sucesivo. Determine el valor presente equivalente de la modificación y del costo de mantenimiento, tanto a mano como con computadora. La tasa de interés es de 8% anual.

Solución a mano

El diagrama de flujo de efectivo (figura 2.18) muestra el valor de salvamento como un flujo de efectivo positivo y todos los costos como negativos. Con la ecuación [2.24] y $g \neq i$ calcule P_g . La P_T total es

$$\begin{aligned} P_T &= -8\,000 - P_g + 1\,300(P/F, 8\%, 6) \\ &= -8\,000 - 1\,700 \left[\frac{1 - (1.11/1.08)^6}{0.08 - 0.11} \right] + 13\,000(P/F, 8\%, 6) \\ &= -8\,000 - 1\,700(5.9559) + 819.26 = \$ -17\,305.85 \end{aligned} \quad [2.25]$$

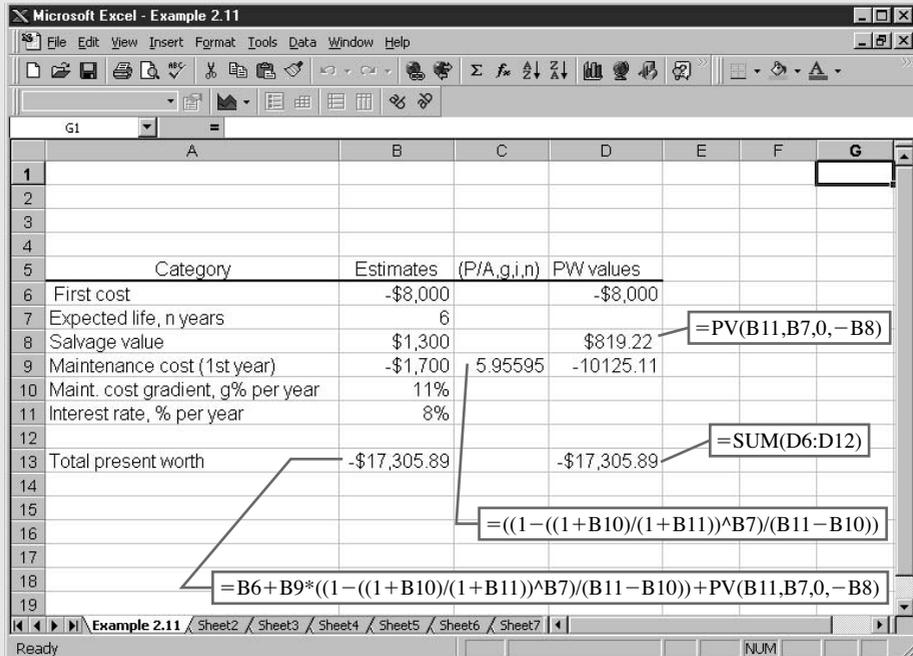
Figura 2.18
Diagrama de flujo de efectivo de un gradiente geométrico, ejemplo 2.11.



Solución por computadora

La figura 2.19 presenta una hoja de cálculo con el valor presente total en la celda B13. La función usada para determinar $P_T = \$-17,305.89$ se detalla en la etiqueta de la celda. Se trata de la ecuación [2.25] reescrita. Puesto que es compleja, las celdas de las columnas C y D también contienen los tres elementos de P_T , los cuales se resumen en D13 para llegar al mismo resultado.

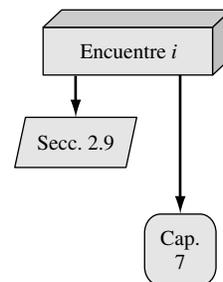
Figura 2.19
Hoja de cálculo para determinar el valor presente de un gradiente geométrico con $g = 11\%$, ejemplo 2.11.



2.7 CÁLCULO DE TASAS DE INTERÉS DESCONOCIDAS

En algunos casos se conocen la cantidad de dinero depositado y la cantidad de dinero recibido luego de un número especificado de años, pero se desconoce la tasa de interés o la tasa de rendimiento. Cuando hay involucrados una cantidad única, una serie uniforme, o un gradiente convencional uniforme, la tasa desconocida puede determinarse para i por una solución directa de la ecuación del valor del dinero en el tiempo. Sin embargo, cuando hay pagos no uniformes o muchos factores, el problema debe resolverse empleando un método de ensayo y error o un método numérico. Los problemas más complicados se estudiarán en el capítulo 7.

Las fórmulas de pago único pueden reordenarse con facilidad y expresarse en términos de i , pero para las ecuaciones de serie uniforme y de gradientes, comúnmente es necesario *resolver para el valor del factor* y determinar la tasa de interés a partir de las tablas de factores de interés. Ambas situaciones se ilustran en los siguientes ejemplos.



EJEMPLO 2.12

Si Laurel puede hacer una inversión de negocios que requiere un gasto de \$3 000 ahora con el objetivo de recibir \$5 000 dentro de cinco años, ¿cuál sería la tasa de rendimiento sobre la inversión? Si Laurel puede recibir 7% anual de intereses de un certificado de depósito, ¿qué inversión debe realizarse?

Solución

Como sólo hay fórmulas de pago único en este problema, la i puede determinarse directamente a partir del factor P/F .

$$P = F(P/F, i, n) = F \frac{1}{(1+i)^n}$$

$$3\,000 = 5\,000 \frac{1}{(1+i)^5}$$

$$0.600 = \frac{1}{(1+i)^5}$$

$$i = \left(\frac{1}{0.6} \right)^{0.2} - 1 = 0.1076 \quad (10.76\%)$$

Alternativamente, la tasa de interés puede encontrarse estableciendo la relación P/F en notación estándar, resolviendo para el valor del factor e interpolando en las tablas.

$$P = F(P/F, i, n)$$

$$\$3\,000 = 5\,000(P/F, i, 5)$$

$$(P/F, i, 5) = \frac{3\,000}{5\,000} = 0.60$$

De acuerdo con las tablas de interés, un factor P/F de 0.6000 para $n = 5$ se encuentra entre 10 y 11%. Interpolando entre estos dos valores, se obtiene $i = 10.76\%$.

Puesto que 10.76% es mayor que el 7% disponible en certificados de depósito, Laurel debería realizar la inversión de negocios. Como se recibirá la mayor tasa de rendimiento en la inversión del negocio, es probable que Laurel seleccione esta opción en lugar de los certificados de depósito. No obstante, no se especificó el grado de riesgo asociado con la inversión financiera. En efecto, el riesgo constituye un parámetro importante y con frecuencia conduce a la elección de la inversión con la menor tasa de rendimiento. A menos que se especifique lo contrario, en los problemas en este texto se considerará igual riesgo para todas las alternativas.



La función TIR de la hoja de cálculo es una de las más útiles de todas las disponibles. TIR significa *tasa interna de rendimiento (internal rate of return)*, que es un tema de interés en sí mismo, analizado con detalle en el capítulo 7. Sin embargo, incluso en la etapa inicial del análisis de la ingeniería económica, la función TIR puede utilizarse con beneficio para determinar la tasa de interés (o tasa de rendimiento), para cualquier serie de flujos de efectivo que se ingrese en una serie de celdas contiguas de la hoja de cálculo, ya sea en forma vertical u horizontal. Es muy importante que cualesquiera años (periodos) con flujo de efectivo cero tengan una entrada de '0' en la celda. Una celda que se deja en blanco no es suficiente, ya que la función TIR desplegaría un valor incorrecto de i . El formato básico es

TIR(first_cell:last_cell)

First_cell y last_cell son las referencias de las celdas para el inicio y final de la serie de flujos de efectivo. El ejemplo 2.13 ilustra la función TIR.

TASA, también muy útil, es una alternativa a TIR. TASA es una función de una celda que despliega la tasa de interés compuesto (o tasa de rendimiento) sólo cuando los flujos de efectivo anuales, es decir, los valores A , son los mismos. Se pueden ingresar valores presente y futuro diferentes del valor A . El formato es

TASA(number_years,A,P,F)

El valor F no incluye la cantidad A que ocurre en el año n . No es necesario ingresar cada flujo de efectivo dentro de las celdas de la hoja de cálculo para usar TASA, de modo que esta función debería utilizarse siempre que exista una serie uniforme durante n años con valores establecidos asociados P y/o F . El ejemplo 2.13 ilustra la función TASA.

EJEMPLO 2.13

Professional Engineers, Inc., requiere colocar \$500 por año en la cuenta de un fondo de amortización para cubrir cualquier reparación mayor inesperada en el equipo de campo. En un caso, \$500 se depositaron a 15 años y cubrieron un costo de reparación de \$10 000 en el año 15. ¿Qué tasa de rendimiento ofreció esta práctica a la compañía? Resuelva a mano y con la ayuda de una computadora.

Solución a mano

El diagrama de flujo de efectivo se muestra en la figura 2.20. Cualquiera de los factores, A/F o F/A , puede utilizarse. Si se utiliza A/F :

$$A = F(A/F, i, n)$$

$$500 = 10\,000(A/F, i, 15)$$

$$(A/F, i, 15) = 0.0500$$

Según las tablas de interés 8 y 9, bajo la columna A/F para 15 años, el valor 0.0500 se encuentra entre 3 y 4%. Por interpolación, $i = 3.98\%$ (que se considera un bajo rendimiento para un proyecto de ingeniería).

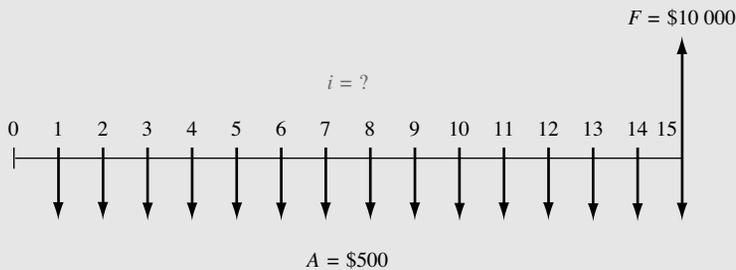


Figura 2.20

Diagrama para determinar la tasa de rendimiento, ejemplo 2.13.

Solución por computadora

Consulte el diagrama de flujo de efectivo (figura 2.20), mientras completa la hoja de cálculo (figura 2.21). Se puede aplicar una solución de una sola celda usando la función TASA, ya que $A = \$-500$ ocurre cada año y el valor $F = \$10,000$ se presenta en el último año de la serie. La celda A3 contiene la función TASA(15,-500,,10000), y la respuesta que se despliega es 3.98%. El signo menos en 500 indica el depósito anual. Es necesaria la coma adicional para indicar que ningún valor P está presente. Esta función es rápida, pero sólo permite una limitada sensibilidad en el análisis; todos los valores A tienen que cambiar por la misma cantidad. La función TIR es mucho mejor para responder preguntas del tipo “¿y qué pasa si...?”

Para aplicar la función TIR y obtener la misma respuesta, ingrese el valor 0 en una celda (para el año 0), seguido de -500 para 14 años y 9,500 (de 10,000 - 500) en el año 15. La figura 2.21 contiene estos números en las celdas D2 a D17. Ingrese la función TIR(D2:D17) en cualquier celda sobre la hoja de cálculo. Se despliega la respuesta $i = 3.98\%$ en la celda E3. Es aconsejable ingresar el número de años 0 hasta n (15, en este ejemplo) en la columna inmediatamente a la izquierda de las entradas de flujo de efectivo. La función TIR no necesita estos números, pero hace que la actividad de ingresar el flujo de efectivo sea más sencilla y más exacta. Ahora se puede cambiar cualquier flujo de efectivo, y se desplegará de inmediato una nueva tasa vía TIR.



Sol-R



Sol-E

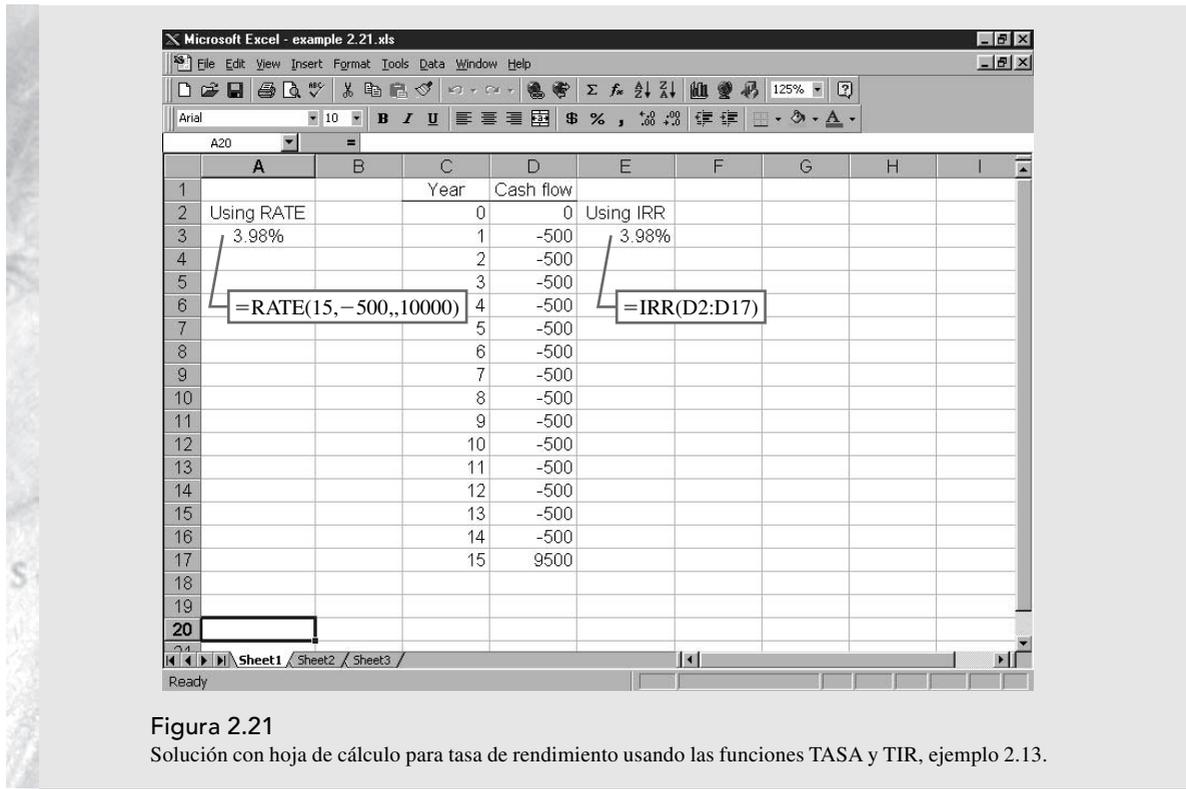


Figura 2.21

Solución con hoja de cálculo para tasa de rendimiento usando las funciones TASA y TIR, ejemplo 2.13.

2.8 CÁLCULO DEL NÚMERO DE AÑOS DESCONOCIDOS

Para que una serie de flujos de efectivo proporcione una tasa de rendimiento establecida, algunas veces es necesario determinar el número de años (periodos) requeridos. Otras veces se desea saber cuándo determinadas cantidades de dinero estarán disponibles a partir de una inversión propuesta. En ambos casos, la incógnita es n . Para encontrar esta variable se utilizan técnicas similares a las de la sección anterior. Algunos problemas se resuelven directamente para n con una manipulación de las fórmulas de pago único y de serie uniforme. En otros casos, n se calcula usando interpolación en las tablas de interés, como se verá más adelante.

La función NPER de la hoja de cálculo es útil para encontrar rápidamente el número de años (periodos) n para valores dados de A , P y/o F . El formato es

$$\text{NPER}(i\%,A,P,F)$$



Si no está involucrado el valor futuro F , éste se omite; no obstante, deben ingresarse un valor presente P y una cantidad uniforme A . La entrada A puede ser cero sólo cuando se conocen cantidades únicas P y F , como en el ejemplo siguiente. Al menos una de las entradas debe tener un signo opuesto a las otras para obtener una respuesta de NPER.

EJEMPLO 2.14

¿Cuánto tiempo tomará duplicar \$1 000 si la tasa de interés es del 5% anual?

Solución

El valor n se determina ya sea mediante el factor F/P o el factor P/F . Utilizando el factor P/F ,

$$P = F(P/F, i, n)$$

$$1\ 000 = 2\ 000(P/F, 5\%, n)$$

$$(P/F, 5\%, n) = 0.500$$

Según la tabla de interés, en 5% el valor 0.500 se encuentra entre 14 y 15 años. Por interpolación, $n = 14.2$ años. Use la función $\text{NPER}(5\%, 0, -1000, 2000)$ para desplegar un valor n de 14.21 años.



Sol-R

2.9 APLICACIÓN DE LAS HOJAS DE CÁLCULO-ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD BÁSICO

Se han realizado cálculos de ingeniería económica con las funciones de la hoja de cálculo VP, VF, PAGO, TIR y NPER que se presentaron en la sección 1.8. La mayoría de las funciones toman sólo una celda individual de la hoja de cálculo para encontrar la respuesta. El ejemplo siguiente ilustra cómo resolver un problema ligeramente más complejo, que implica análisis de sensibilidad; es decir, ayuda a responder preguntas del tipo “¿y qué pasa si...?”

EJEMPLO 2.15

Un ingeniero y un médico se asociaron para desarrollar una importante mejora en cirugía laparoscópica para operaciones de la vesícula biliar. Formaron una pequeña compañía para manejar los aspectos financieros de su asociación. La compañía ya ha invertido \$500 000 en el proyecto este año ($t = 0$) y espera gastar \$500 000 anualmente durante los siguientes 4 años, y posiblemente durante más años. Desarrolle una hoja de cálculo que le ayude a responder las siguientes preguntas:

- Suponga que se gastan \$500 000 sólo durante 4 años adicionales. Si la compañía vende en \$5 millones los derechos para usar la nueva tecnología al final del año 5, ¿cuál es la tasa de rendimiento anticipada?
- El ingeniero y el médico estiman que necesitarán \$500 000 por año durante más de 4 años adicionales. ¿Cuántos años, a partir de ahora, tienen para finalizar su trabajo de desarrollo y recibir los \$5 millones por derechos de patente para obtener al menos 10% por año? Suponga que los \$500 000 por año se gastan a lo largo del año inmediatamente anterior a la recepción de los \$5 millones.

Solución por computadora

La figura 2.22 presenta la hoja de cálculo, con todos los valores financieros en unidades de \$1 000. La función TIR se emplea a lo largo de toda la solución.



Sol-E

- a) La función TIR(B6:B11) en la celda B15 despliega $i = 24.07\%$. Advierta que existe un flujo de efectivo de $\$-500$ en el año 0. El enunciado equivalente es: gastar $\$500\,000$ ahora y $\$500\,000$ cada año durante 4 años más equivale a recibir $\$5$ millones al final del año 5, cuando la tasa de interés es de 24.07% anual.
- b) Encuentre la tasa de rendimiento para un número creciente de años en que se gasten los $\$500$. Las columnas C y D de la figura 2.22 presentan los resultados de las funciones TIR con el flujo de efectivo de $\$5,000$ en diferentes años. Las celdas C15 y D15 muestran rendimientos sobre lados opuestos de 10% . En consecuencia, los $\$5$ millones deben recibirse en algún momento previo al final del año 7 para lograr más rendimiento que el 8.93% que se muestra en la celda D15. El ingeniero y el médico tienen menos de 6 años para completar su trabajo de desarrollo.

	A	B	C	D	E
2					
3		Part (a)	Part (b)		
4		Find i	Find n such that $i > 10\%$		
5	Year	Get \$5 million in yr 5	Get \$5 million in yr 6	Get \$5 million in yr 7	
6	0	\$ (500)	\$ (500)	\$ (500)	
7	1	\$ (500)	\$ (500)	\$ (500)	
8	2	\$ (500)	\$ (500)	\$ (500)	
9	3	\$ (500)	\$ (500)	\$ (500)	
10	4	\$ (500)	\$ (500)	\$ (500)	
11	5	\$ 5,000	\$ (500)	\$ (500)	
12	6		\$ 5,000	\$ (500)	
13	7			\$ 5,000	
14					
15	Rate of returns	24.07%	14.80%	8.93%	
16					
17		=IRR(B6:B11)	=IRR(C6:C12)	=IRR(D6:D13)	
18					
19					
20					

Figura 2.22

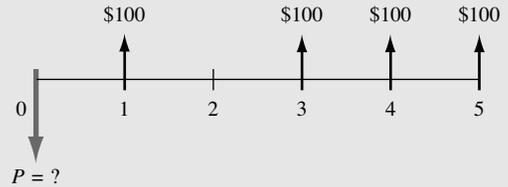
Solución con hoja de cálculo que incluye análisis de sensibilidad, ejemplo 2.15.

EJEMPLO ADICIONAL

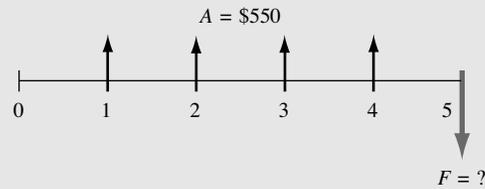
EJEMPLO 2.16

CÁLCULO DE P , F Y A

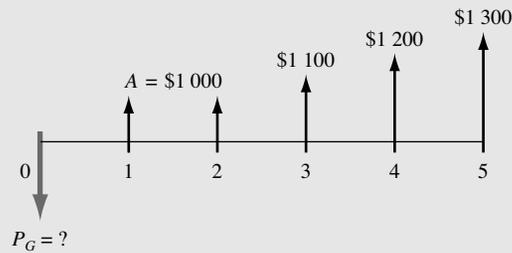
Explique por qué no pueden utilizarse factores de serie uniforme para calcular P o F directamente para cualquiera de los flujos de efectivo mostrados en la figura 2.23.



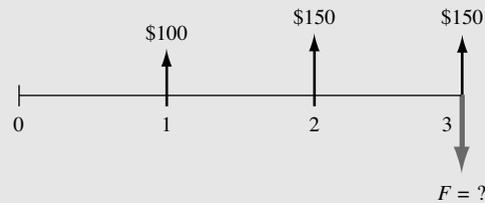
a)



b)



c)



d)

Figura 2.23

Diagramas de flujo de efectivo, ejemplo 2.16.

Solución

- El factor P/A no puede utilizarse para calcular P , ya que el recibo de \$100 anualmente no ocurre todos los años desde el año 1 hasta el año 5.
- Puesto que no hay $A = \$550$ en el año 5, no puede utilizarse el factor F/A . La relación $F = 550(F/A, i, 4)$ daría como resultado el valor futuro en el año 4, no en el año 5.
- El primer valor del gradiente $G = \$100$ ocurre en el año 3. El uso de la relación $P_G = 100(P/G, i\%, 4)$ permitirá calcular P_G en el año 1, no en el año 0. (No se incluye aquí el valor presente de la cantidad base de \$1 000.)
- Los valores de los recibos son desiguales; por lo tanto, la relación $F = A(F/A, i, 3)$ no se puede utilizar para calcular F .

RESUMEN DEL CAPÍTULO

En este capítulo las fórmulas y los factores derivados y aplicados se utilizaron para realizar cálculos de equivalencia para flujos de efectivo presentes, futuros, anuales y de gradiente. La capacidad para usar estas fórmulas y su notación estándar, tanto de forma manual como con hojas de cálculo, es crucial para completar un estudio de ingeniería económica. Al utilizar estas fórmulas y funciones de las hojas de cálculo, resulta posible convertir flujos de efectivo individuales en flujos de efectivo uniformes, gradientes en valores presentes y mucho más. Asimismo, es posible resolver para tasa de rendimiento i o tiempo n . Una cabal comprensión de cómo manipular flujos de efectivo usando el material de este capítulo le ayudará a enfrentar problemas financieros en su desempeño profesional, así como en la vida cotidiana.

PROBLEMAS

Uso de las tablas de interés

2.1 Encuentre el valor numérico correcto de los factores siguientes, a partir de las tablas de interés:

1. $(F/P, 8\%, 25)$
2. $(P/A, 3\%, 8)$
3. $(P/G, 9\%, 20)$
4. $(F/A, 15\%, 18)$
5. $(A/P, 30\%, 15)$

Determinación de F , P y A

2.2 La U.S. Border Patrol analiza la compra de un helicóptero nuevo para la vigilancia aérea de la frontera de Nuevo México y Texas con la República mexicana. Hace cuatro años se adquirió un helicóptero similar con un costo de \$140 000. Con una tasa de interés de 7% anual, ¿cuál sería el valor equivalente actual de dicho monto?

2.3 Pressure Systems, Inc. fabrica transductores de nivel líquido de gran exactitud. Investiga si debe actualizar cierto equipo ahora o hacerlo después. Si el costo hoy es de \$200 000, ¿cuál será la cantidad equivalente dentro de tres años con una tasa de interés de 10% anual?

2.4 Petroleum Products, Inc. es una compañía de ductos que proporciona derivados del petróleo a mayoristas del norte de los Estados Unidos y Canadá. La empresa estudia la compra de medidores de flujo de inserción de turbina que permitan vigilar mejor la integridad de los ductos. Si estos medidores impidieran una interrupción grave (gracias a la detección temprana de pérdida de producto) valuada en \$600 000 dentro de cuatro años, ¿cuánto podría actualmente desembolsar la compañía con una tasa de interés de 12% anual?

2.5 Sensotech, Inc., fabricante de sistemas de microelectrónica, supone que puede reducir en un 10% que sus productos sean retirados del mercado si compra software nuevo para detectar las partes defectuosas. El costo de dicho software es de \$225 000. *a)* ¿Cuánto tendría que ahorrar la compañía anualmente durante cuatro años para recuperar su inversión, si usa una tasa mínima aceptable de rendimiento de 15% anual? *b)* ¿Cuál fue el costo por año de los retiros del mercado antes de que se hubiera comprado el software si la compañía recuperó su inversión exactamente en cuatro años debido a la reducción del 10%?

- 2.6** La empresa Thompson Mechanical Products planea reservar \$150 000 hoy para tal vez reemplazar sus grandes motores sincrónicos de pulido una vez que sea necesario. Si el reemplazo no fuera necesario durante siete años, ¿cuánto tendría la compañía en la inversión que reservó si logra una tasa de rendimiento de 18% anual?
- 2.7** La empresa fabricante de carros Renault firmó un contrato de \$75 millones con ABB de Zurich, Suiza, para automatizar las líneas de montaje del chasis, los talleres de ensamblado de la carrocería y los sistemas de control de línea. Si ABB recibirá el pago dentro de dos años (cuando los sistemas queden listos), ¿cuál es el valor actual del contrato con un interés de 18% anual?
- 2.8** Atlas Long-Haul Transportation analiza la instalación de registradores de temperatura Valutemp en todos sus camiones frigoríficos a fin de vigilar las temperaturas mientras éstos circulan. Si los sistemas disminuirán las reclamaciones por seguros en \$100 000 dentro de dos años, ¿cuánto debe estar dispuesta a pagar ahora la compañía si usa una tasa de interés de 12% anual?
- 2.9** GE Marine Systems planea suministrar a un armador japonés turbinas de gas aeroderivadoras para impulsar los destructores de tipo 11 DD, de la Fuerza Japonesa de Auto-defensa. El comprador puede pagar ahora el importe total de \$1 700 000 estipulado en el contrato, o una cantidad equivalente dentro de un año (cuando se necesitarán las turbinas). Con una tasa de interés de 18% anual, ¿cuál es la cantidad futura equivalente?
- 2.10** ¿Para Corning, Inc., cuál es hoy el valor de un costo futuro de \$162 000 dentro de seis años con una tasa de interés de 12% anual?
- 2.11** ¿Cuánto podría gastar hoy en equipo nuevo Cryogenics, Inc., fabricante de sistemas de almacenamiento de energía basados en superconductores magnéticos, en lugar de dedicar \$125 000 dentro de cinco años si la tasa de rendimiento de la compañía es de 14% anual?
- 2.12** V-Tek Systems es un fabricante de compactadores verticales, y analiza sus requerimientos de flujo de efectivo para los próximos cinco años. La compañía espera reemplazar máquinas de oficina y equipo de computación en varios momentos durante los cinco años del periodo de planeación. Específicamente, la empresa espera gastar \$900 000 dentro de dos años, \$8 000 dentro de tres, y \$5 000 dentro de cinco. ¿Cuál es el valor presente de los gastos planeado con una tasa de interés de 10% anual?
- 2.13** Un sensor de proximidad fijo al extremo de un endoscopio podría reducir los riesgos durante la cirugía de ojos, porque alertaría a los médicos de la localización del tejido crítico de la retina. Si con el uso de esta tecnología cierto oftalmólogo espera evitar demandas por \$1.25 y \$0.5 millones dentro de dos y cinco años, respectivamente, ¿cuánto podría desembolsar hoy si sus diversos costos por las demandas sólo fueran el 10% del monto total de cada una de ellas? Use una tasa de interés de 8% anual.
- 2.14** El costo actual del seguro por adeudos para cierta empresa de consultoría es de \$65 000. Si se espera que el costo del seguro se incremente 4% cada año, ¿cuál será el costo dentro de cinco años?
- 2.15** American Gas Products produce un aparato llamado Can-Emitor que vacía el contenido de las latas viejas de aerosol en dos o tres segundos. Esto evita tener que eliminarlas como desechos peligrosos. Si cierta compañía de pinturas puede ahorrar \$75 000 al año en sus costos de eliminación de desechos, ¿cuánto podría gastar ahora en el Can-Emitor, si quiere recuperar su inversión en tres años, con una tasa de interés de 20% anual?

- 2.16** Atlantic Metals and Plastic usa aleaciones de níquel-cromo para manufacturar conductores resistentes al calor. La compañía estudia un proceso nuevo de impresión templada para reducir sus costos. Si el proceso nuevo costaría hoy \$1 800 000, ¿cuánto debe ahorrarse cada año para recuperar la inversión en seis años, con una tasa de interés de 12% anual?
- 2.17** El alga verde *Chlamydomonas reinhardtii* puede producir hidrógeno si se le priva de azufre por un periodo de hasta dos días. Una compañía pequeña necesita comprar equipo que cuesta \$3 400 000 para comercializar el proceso. Si la empresa espera tener una tasa de rendimiento de 20% anual y recuperar su inversión en ocho años, ¿cuál debe ser el valor neto del hidrógeno que se produzca cada año?
- 2.18** ¿Cuánto dinero podría pedir prestado RTT Environmental Services para financiar un proyecto de rehabilitación de sitios, si espera ingresos de \$280 000 anualmente durante un periodo de limpieza de cinco años? Se supone que los gastos asociados al proyecto sean de \$90 000 por año. Use una tasa de interés de 10% anual.
- 2.19** Western Playland and Aquatics Park gasta \$75 000 cada año en servicios de consultoría por la inspección de viajes. Una tecnología basada en elementos actuadores nuevos permite que los ingenieros simulen movimientos complejos en cualquier dirección controlados por computadora. ¿Cuánto podría permitirse gastar hoy el parque en la tecnología nueva si ya no fueran necesarios los servicios de consultoría anuales? Suponga que el parque usa una tasa de interés de 15% anual, y desea recuperar su inversión dentro de cinco años.
- 2.20** Por medio de un acuerdo con Internet Service Providers (ISPs) Association, la empresa SBC Communications redujo el precio que ISPs cobra por revender su servicio de línea suscriptor digital de alta velocidad (DSL), de \$458 a \$360 anual por línea consumidora. Un ISP particular, que tiene 20 000 clientes, planea trasladar 90% de los ahorros a su clientela. ¿Cuál es el valor total futuro de estos ahorros durante un horizonte de cinco años con una tasa de interés de 8% anual?
- 2.21** A fin de mejorar la detección de grietas en sus aviones, la Fuerza Aérea de los Estados Unidos combinó procedimientos de inspección ultrasónica con calentamiento por láser para identificar agrietamientos debidos al debilitamiento. La detección a tiempo de éstos podría reducir los costos de reparación hasta en \$200 000 por año. ¿Cuál es el valor presente de estos ahorros en un periodo de cinco años, con una tasa de interés de 10% anual?
- 2.22** Una recién egresada de ingeniería aprobó el examen de FI y recibió un aumento (al comienzo del primer año) de \$2 000. Con una tasa de interés de 8% anual, ¿cuál es el valor presente de los \$2 000 cada año, si espera ejercer su carrera profesional durante 35 años?
- 2.23** Southwestern Moving and Storage quiere tener dinero suficiente para comprar un tractocamión nuevo dentro de tres años. Si la unidad costará \$250 000, ¿cuánto debe reservar cada año la compañía si la cuenta rinde 9% al año?
- 2.24** Vision Technologies, Inc. es una compañía pequeña que usa tecnología de banda ancha para desarrollar dispositivos capaces de detectar objetos (inclusive personas) dentro de los edificios, tras las paredes o bajo el piso. La empresa espera gastar \$100 000 al año en mano de obra y \$125 000 anuales en suministros, antes de que pueda comercializarse un producto. Con una tasa de interés de 15% anual, ¿cuál es la cantidad futura equivalente total de los gastos de la compañía al final de tres años?

Valores de factores

- 2.25** Determine el valor numérico de los siguientes factores utilizando *a*) interpolación y *b*) la fórmula apropiada
1. ($P/F, 18\%, 33$)
 2. ($A/G, 12\%, 54$)
- 2.26** Calcule el valor numérico de los siguientes factores utilizando *a*) interpolación y *b*) la fórmula apropiada
1. ($F/A, 19\%, 20$)
 2. ($P/A, 26\%, 15$)

Gradiente aritmético

- 2.27** Una secuencia de flujo de efectivo inicia en el año 1 en \$3 000 y aumenta en \$1 000 cada año hasta el año 10. *a*) calcule el valor del gradiente G , *b*) determine la cantidad de flujo de efectivo en el año 8 y *c*) encuentre el valor de n para el gradiente.
- 2.28** Cisco Systems espera ventas que se describen en la secuencia de flujo de efectivo dada por $(6\,000 + 5k)$, en la que k está expresada en años y el flujo de efectivo en millones. Determine *a*) el valor del gradiente G , *b*) el monto de flujo de efectivo en el año 6 y *c*) el valor de n para el gradiente si el flujo de efectivo termina en el año 12.
- 2.29** Para la secuencia de flujo de efectivo que comienza en el año 1, expresada por la relación $900 - 100k$, donde k representa los años 1 a 5, *a*) determine el valor del gradiente G , y *b*) calcule el flujo de efectivo en el año 5.
- 2.30** Omega Instruments presupuestó \$300 000 anuales a fin de pagar ciertas partes de cerámica durante los cinco próximos años. Si la compañía espera que el costo de las partes se incremente de manera uniforme de acuerdo con un gradiente aritmético de \$10 000 por año, ¿cuál se espera que sea su costo en el año 1 si la tasa de interés es de 10% anual?
- 2.31** Chevron-Texaco espera que los ingresos provenientes de pozos *stripper* (aquellos que producen menos de diez barriles diarios) disminuyan de acuerdo con un gradiente aritmético de \$50 000 por año. Estos ingresos anuales se espera sean de \$280 000 (es decir, al final del año 1), y la compañía espera que la vida útil de los pozos sea de cinco años. *a*) ¿Cuál es el monto del flujo de efectivo en el año 3, y *b*) ¿cuál es el valor anual uniforme equivalente en los años 1 a 5 del ingreso que generan los pozos, con una tasa de interés de 12% anual?
- 2.32** El ingreso por concepto del reciclado de cartón en Fort Bliss se ha estado elevando a una tasa constante de \$1 000 en cada uno de los tres últimos años. Si el de este año (es decir, al final del año 1) se espera sea de \$4 000, y la tendencia de incremento continúa hasta el año 5, *a*) ¿cuál será el ingreso dentro de tres años (es decir, al final del año 3), y *b*) ¿cuál es el valor presente del ingreso durante el periodo de cinco años, con una tasa de interés de 10% anual?
- 2.33** Amazon estudia la adquisición de un sistema de cómputo avanzado para *cubicar* las dimensiones de un libro (medir su altura, longitud y ancho de modo que se use el tamaño adecuado de caja para enviarlo). Esto ahorrará material, cartón y mano de obra. Si en el primer año los ahorros serán de \$150 000 y de \$160 000 en el segundo, y las cantidades se incrementan anualmente en \$10 000 durante ocho años, ¿cuál es el valor presente del sistema, con una tasa de interés de 15% anual?
- 2.34** West Coast Marine & RV estudia la sustitución de los controladores de cable colgantes de sus grúas más poderosas por nuevos controladores portátiles de teclado. La compañía espera tener ahorros de \$14 000 en sus costos del primer año, y esta cantidad se incrementará anualmente \$1 500 durante cada uno de los cuatro años próximos. Con una tasa de interés de 12% por año, ¿cuál es el valor anual equivalente de los ahorros?

- 2.35** Ford Motor Company puede reducir en 80% el costo requerido por instalar instrumentos para recabar datos en los vehículos de prueba por medio de usar transductores de potencia de giroscopio desarrollados por MTS. *a*) Si se espera que el costo en este año (es decir, al final del año 1) sea de \$2 000, ¿cuál fue el costo el año anterior a la instalación de los transductores? *b*) Si se espera que los costos se incrementen por año \$250 durante los cuatro años siguientes (es decir, hasta el año 5), ¿cuál es el valor anual equivalente de los costos (años 1 a 5) con una tasa de interés de 18% anual?
- 2.36** Para el flujo de efectivo que se muestra a continuación, determine el valor de G que hará que el valor futuro en el año 4 sea igual a \$6 000 a una tasa de interés de 15% anual.

Año	0	1	2	3	4
Flujo de efectivo	0	\$200	200 + G	200 + 2 G	200 + 3 G

- 2.37** Una compañía farmacéutica importante pronostica que en los años por venir podría verse involucrada en litigios relacionados con los efectos colaterales que se perciben en uno de sus medicamentos antidepresivos. A fin de preparar fondos destinados especialmente para esto, la empresa quiere tener dinero disponible dentro de seis años, que hoy tiene un valor presente de \$50 000 000. La compañía espera reservar \$6 000 000 el primer año e incrementar esta cifra de manera uniforme en cada uno de los cinco años siguientes. Si la empresa espera obtener 12% anual sobre el dinero que reserve, ¿cuánto debe incrementar cada año la cantidad reservada a fin de alcanzar su objetivo?
- 2.38** Un fabricante de refacciones automotrices que comienza sus operaciones espera gastar \$1 000 000 el primer año por concepto de publicidad, con cantidades que disminuyen \$100 000 cada año. Se espera que el ingreso sea de \$4 000 000 el primer año y que aumente \$500 000 anualmente. Determine el valor anual equivalente en los años 1 a 5

del *flujo neto de efectivo* de la compañía, con una tasa de interés de 16% por año.

Gradiente geométrico

- 2.39** Suponga que le pidieran preparar una tabla de valores de los factores (como la que se encuentra al final del libro) para calcular el valor presente de una serie de gradiente geométrico. Determine los tres primeros valores (es decir, para $n = 1, 2$ y 3) para una tasa de interés de 10% anual, y una tasa de incremento de g de 4% anual.
- 2.40** Una ingeniera química que planea su jubilación depositará 10% de su salario cada año en un fondo accionario de alta tecnología. Si este año su salario es de \$60 000 (es decir, al final del año 1) y espera que se incremente 4% cada año, ¿cuál será el valor presente del fondo después de 15 años si rinde 4% anual?
- 2.41** Se sabe que el esfuerzo que se requiere para mantener un microscopio electrónico de barrido se incrementa en un porcentaje fijo cada año. Una compañía de mantenimiento de equipos de alta tecnología ofrece sus servicios por una cuota de \$25 000 para el primer año (es decir, al final del año 1), con incrementos de 6% anual a partir de entonces. Si una empresa de biotecnología desea celebrar un contrato de tres años para aprovechar las ventajas de ciertas exenciones fiscales temporales, ¿cuánto debe estar dispuesta a pagar si usa una tasa de interés de 15% anual?
- 2.42** Hughes Cable Systems planea ofrecer a sus empleados un paquete de mejoras salariales cuya componente principal es la participación en las utilidades. Específicamente, la compañía reservaría 1% de las ventas totales para los bonos de fin de año de todos sus trabajadores. Se espera que las ventas sean de \$5 000 000 el primer año y de \$6 000 000 el segundo, con incrementos de 20% durante cada uno de los cinco años siguientes. Con una tasa de interés de 10% por año, ¿cuál es el valor anual equivalente en los años 1 a 5 del paquete de bonos?

- 2.43** Determine cuánto dinero habría en una cuenta de ahorros que comenzó con un depósito de \$2 000 en el año 1, y cantidades posteriores que se incrementaban 10% cada año. Use una tasa de interés de 15% anual y un periodo de siete años.
- 2.44** Se encontró que el valor futuro en el año 10 de una serie gradiente geométrica de flujos de efectivo era de \$80 000. Si la tasa de interés fue de 15% por año, y de 9% la tasa anual de incremento, ¿cuál fue el monto del flujo de efectivo en el año 1?
- 2.45** Thomasville Furniture Industries ofrece varios tipos de telas de alto rendimiento capaces de resistir productos químicos tan dañinos como el cloro. Cierta compañía manufacturera del oeste medio de los Estados Unidos que usa la tela en varios de sus productos reportó que el valor presente de sus compras de este material durante un periodo de cinco años había sido de \$900 000. Si se sabe que los costos se incrementaron en forma geométrica 5% por año durante ese periodo, y que la empresa usa una tasa de interés de 15% anual para sus inversiones, ¿cuál fue el costo de la tela en el año 2?
- 2.46** Encuentre el valor presente de una serie de inversiones que comenzaron con \$1 000 en el año 1 con incrementos anuales de 10% durante 20 años. Suponga que la tasa de interés es de 10% anual.
- 2.47** Una empresa de consultoría del norte de California quiere comenzar a ahorrar dinero para reemplazar sus servidores de red. Si invierte \$3 000 al final del año 1 e incrementa la cantidad invertida 5% cada año, ¿cuánto habrá en la cuenta dentro de cuatro años si percibe intereses a una tasa de 8% anual?
- 2.48** Una compañía que fabrica monitores de sulfuro de hidrógeno purgables planea realizar depósitos de dinero de manera que cada uno sea 5% mayor al anterior. ¿De cuánto debe ser el primer depósito que haga (al final del año 1) si éstos se extienden hasta el año 10 y el cuarto de ellos es de \$1 250? Emplee una tasa de interés de 10% anual.

Tasa de interés y tasa de rendimiento

2.49 ¿Qué tasa de interés compuesto anual es equivalente a 12% de interés simple anual, durante un periodo de 15 años?

2.50 Una empresa de consultoría en ingeniería que cotiza en la bolsa paga un bono a cada ingeniero al final del año con base en la utilidad que se obtiene durante ese periodo. Si la inversión inicial de la compañía fue de \$1 200 000, ¿qué tasa de rendimiento ha obtenido sobre su inversión si el bono de cada ingeniero ha sido de \$3 000 por cada uno de los 10 últimos años? Suponga que la empresa tiene seis ingenieros y que el bono monetario representa 5% de la utilidad de la compañía.

2.51 Danson Iron Works, Inc. fabrica cojinetes esféricos angulares para bombas que operan en ambientes hostiles. Si la compañía invirtió \$2 400 000 en un proceso que dejó utilidades de \$760 000 anuales durante cinco años, ¿qué tasa de rendimiento tuvo la compañía sobre su inversión?

2.52 Una inversión de \$600 000 se incrementó a \$1 000 000 en un periodo de cinco años. ¿Cuál fue la tasa de rendimiento sobre la inversión?

2.53 Una compañía pequeña que se especializa en recubrimientos en polvo expandió su edificio y compró un horno nuevo que tiene el tamaño suficiente para tratar carrocerías de automóvil. El edificio y horno costaron \$125 000, pero un negocio nuevo de rodillos calientes ha incrementado su ingreso anual en \$520 000. Si los gastos de operación de gas, materiales, mano de obra, etc., tienen un importe de \$470 000 por año, ¿qué tasa de rendimiento se obtendrá sobre la inversión si en el cálculo sólo se incluye los flujos de efectivo que tienen lugar durante los cuatro años siguientes?

- 2.54** El plan de negocios para una compañía que inicia, dedicada a la fabricación de detectores portátiles de gases múltiples tiene flujos anuales de efectivo equivalentes a \$400 000 para los cinco primeros años. Si el flujo de efectivo en el año 1 fue de \$320 000 y el incremento posterior fue de \$50 000 por año, ¿qué tasa de interés se usó para el cálculo?
- 2.55** Una compañía nueva que fabrica arrancadores suaves de voltaje medio gastó \$85 000 para construir un sitio web nuevo. El ingreso neto fue de \$60 000 el primer año, con un incremento de \$15 000 anuales. ¿Qué tasa de rendimiento tuvo la compañía en sus primeros cinco años?
- 2.58** Una ingeniera que invirtió muy bien planea jubilarse ahora porque tiene \$2 000 000 en su cuenta de ahorro para el retiro. ¿En cuánto tiempo podrá retirar \$100 000 anuales (el año 1 comienza a partir de ahora) si su cuenta gana intereses a una tasa de 4% anual?
- 2.59** Una compañía que manufactura sensores de viento ultrasónicos invirtió \$1 500 000 hace dos años para adquirir parte de la propiedad de una compañía innovadora fabricante de chips. ¿Cuánto tomará (a partir de la inversión inicial) para que su participación en dicha empresa genere un valor de \$3 000 000 si ésta crece a una tasa de 20% anual?
- 2.60** Un ingeniero mecánico planea jubilarse cuando tenga \$1 600 000 en su cuenta de corretaje. Si comenzó con \$100 000 en la cuenta, ¿cuánto tiempo pasará (a partir del momento en que comenzó) antes de que pueda jubilarse si la cuenta tiene una tasa de rendimiento de 18% anual?

Número de años

- 2.56** Una empresa productora de válvulas de control de plástico tiene un fondo de \$500 000 para reemplazo de equipo. Si la compañía gasta \$75 000 por año en equipo nuevo, ¿cuántos años tomará reducir el fondo a menos de \$75 000 con una tasa de interés de 10% anual?
- 2.57** La empresa A&E estudia la compra por medio de un arrendamiento de largo plazo del edificio que ocupa actualmente, ya que el propietario del inmueble lo puso a la venta súbitamente. El edificio se ofrece a un precio de \$170 000. Como el arrendamiento de este año ya se pagó, el siguiente pago anual de \$30 000 no se realizará sino hasta el término de este año. Debido a que la empresa A&E ha sido un buen inquilino, el propietario ofreció venderle el edificio en \$160 000. Si la compañía lo compra sin enganche, ¿cuánto tiempo pasará antes de que recupere su inversión con una tasa de interés de 12% anual?
- 2.61** ¿Cuántos años tomará para que un depósito uniforme anual de tamaño A acumule 10 veces el monto de un solo depósito, si la tasa de rendimiento es de 10% por año?
- 2.62** ¿Cuántos años se requieren para que una inversión de \$10 000 en el año 1 con incrementos de 10% anual tengan un valor presente de \$1 000 000 con una tasa de interés de 7% anual?
- 2.63** Se dijo a una persona que cierta secuencia de flujo de efectivo había comenzado con \$3 000 en el año 1 con incrementos de \$2 000 cada año. ¿Cuántos años son necesarios para que el valor anual equivalente de la secuencia sea de \$12 000, con una tasa de interés de 10% anual?

PROBLEMAS DE REPASO FI

- 2.64** Una compañía constructora cuenta con la opción, en algún momento entre el día de hoy

y los próximos cuatro años, de comprar una excavadora en \$61 000. Si la empresa planea

- adquirir la máquina dentro de cuatro años, la cantidad equivalente presente que la compañía pagaría por ella estaría muy cerca de
- a) \$41 230
b) \$46 710
c) \$48 320
d) Más de \$49 000
- 2.65** El costo de la colegiatura en cierta universidad pública fue de \$160 por hora-crédito hace cinco años. El costo hoy (exactamente cinco años después) es de \$235. La tasa de incremento anual es la más cercana a
- a) 4%
b) 6%
c) 8%
d) 10%
- 2.66** El valor presente de un gradiente geométrico que se incrementa es de \$23 632. La tasa de interés es de 6% por año, y 4% la tasa de cambio anual. Si el monto del flujo de efectivo en el año 1 es de \$3 000, el gradiente finaliza en el año
- a) 7
b) 9
c) 11
d) 12
- 2.67** El ganador de una lotería megamillonaria obtuvo el premio mayor de \$175 000 000 y contó con la opción de recibir pagos de \$7 000 000 anuales durante 25 años comenzando por el año 1 hoy, o tomar ahora \$109 355 000. ¿Con qué tasa de interés son equivalentes las dos opciones?
- a) 4%
b) 5%
c) 6%
d) 7%
- 2.68** Un fabricante de válvulas de desagüe para sanitarios quiere tener disponibles \$2 800 000 dentro de diez años, de modo que pueda iniciar una línea nueva de productos. Si la compañía planea depositar dinero cada año, con el inicio hoy del año 1, ¿cuánto tendrá que depositar cada vez con un interés de 6% anual a fin de disponer de \$2 800 000 inmediatamente después de hacer el último depósito?
- a) Menos de \$182 000
b) \$182 500
c) \$191 300
d) Más de \$210 000
- 2.69** Rubbermaid Plastics Corp. invirtió \$10 000 000 en equipo de manufactura para producir cestos pequeños para basura. Si la compañía usa una tasa de interés de 15% anual, ¿cuánto dinero tendría que ganar cada año si quisiera recuperar su inversión en siete años?
- a) \$2 403 600
b) \$3 530 800
c) \$3 941 800
d) Más de \$4 000 000
- 2.70** Un ingeniero deposita \$8 000 el año 1, \$85 900 el año 2, y cada año las cantidades se incrementan en \$500, hasta el año 10. Con una tasa de interés de 10% anual, el valor presente está muy cerca de
- a) \$60 600
b) \$98 300
c) \$157 200
d) \$173 400
- 2.71** La cantidad de dinero que podría gastarse dentro de siete años, en lugar de gastar \$50 000 ahora, con una tasa de interés de 18% por año, es la más cercana a
- a) \$15 700
b) \$159 300
c) \$199 300
d) \$259 100
- 2.72** Un depósito de \$10 000 dentro de 20 años, con una tasa de interés de 10% anual, tiene un valor presente muy próximo a
- a) \$1 720
b) \$1 680
c) \$1 590
d) \$1 490
- 2.73** El ingreso por ventas de un aditivo para gasolina limpiador de inyectores ha sido en promedio de \$100 000 por año. Con una tasa

de interés de 18% anual, el valor futuro del ingreso en los años 1 a 5 está muy cerca de

- a) \$496 100
- b) \$652 200
- c) \$715 420
- d) Más de \$720 000

2.74 Los costos químicos asociados a un incinerador de gas con chimenea compresora (para control de olores) han estado decreciendo de manera uniforme durante cinco años gracias a los aumentos en su eficiencia. Si el costo en el año 1 fue de \$100 000 y disminuyó \$5 000 por año hasta el quinto, el valor presente de los costos con 10% anual está muy cerca de

- a) Menos de \$350 000
- b) \$402 200
- c) \$515 400
- d) Más de \$520 000

2.75 El valor futuro en el año 10 de una inversión presente de \$20 000, con una tasa de interés de 12% anual, es muy cercano a

- a) \$62 120
- b) \$67 560
- c) \$71 900
- d) \$81 030

2.76 Una compañía manufacturera obtiene un préstamo de \$100 000 con la promesa de saldarlo en pagos anuales iguales durante un periodo de cinco años. Con una tasa de interés de 12% anual, cada pago estará cerca de

- a) \$23 620
- b) \$27 740
- c) \$29 700
- d) \$31 800

2.77 Simpson Electronics quiere tener \$100 000 disponibles dentro de tres años para reemplazar una línea de producción. La cantidad de dinero que tendría que depositar cada año con una tasa de interés de 12% anual sería muy cercana a

- a) \$22 580
- b) \$23 380

- c) \$29 640
- d) Más de \$30 000

2.78 Un ingeniero civil deposita \$10 000 por año en una cuenta para el retiro que tiene una tasa de rendimiento de 12% anual. La cantidad de dinero en la cuenta al término de 25 años está muy cerca de

- a) \$670 500
- b) \$902 800
- c) \$1 180 900
- d) \$1 333 300

2.79 El valor futuro (en el año 8) de \$10 000 en el año 3, \$10 000 en el año 5 y \$10 000 en el año 8, con una tasa de interés de 12% anual, es muy cercano a

- a) \$32 100
- b) \$39 300
- c) \$41 670
- d) \$46 200

2.80 Los costos de mantenimiento para un oxidante térmico regenerativo se han incrementado de manera uniforme durante cinco años. Si el costo en el año 1 fue de \$8 000 y aumentó anualmente \$900 hasta el quinto año, el valor presente de los costos con una tasa de interés de 10% anual está muy próximo a

- a) \$31 670
- b) \$33 520
- c) \$34 140
- d) Más de \$36 000

2.81 Una inversión de \$100 000 generó un ingreso anual de \$20 000 durante 10 años. La tasa de rendimiento de la inversión es la más cercana a

- a) 15%
- b) 18%
- c) 21%
- d) 25%

2.82 Una compañía constructora invirtió \$60 000 en una excavadora nueva. Si se espera que el ingreso proveniente del arrendamiento

temporal de la máquina sea de \$15 000 por año, el periodo de tiempo que se requiere para recuperar la inversión con una tasa de interés de 18% anual está muy cerca de

- a) 5 años
- b) 8 años
- c) 11 años
- d) 13 años

ESTUDIO DE CASO

¿QUÉ DIFERENCIA PUEDEN HACER LOS AÑOS Y EL INTERÉS COMPUESTO?

Dos situaciones del mundo real

1. La compra de la isla de Manhattan. La historia reporta que la isla de Manhattan, en Nueva York, fue comprada por el equivalente de \$24 en el año 1626. En el año 2001, se reconoció el 375 aniversario de la compra de Manhattan.
2. El programa de opción de compra de acciones. Un joven graduado de la escuela de ingeniería de una universidad de California ingresó a trabajar en una compañía a la edad de 22 años y colocó \$50 por mes en la opción de compra de acciones. Dejó la compañía luego de 60 meses completos de empleo, a los 27 años, y no vendió sus acciones. El ingeniero no preguntó el valor de las acciones hasta que tuvo 57 años, unos 30 años después.

Ejercicios para el estudio de caso

Acerca de la compra de la isla de Manhattan:

1. Las inversiones del sector público se evalúan al 6% anual. Suponga que Nueva York ha invertido los \$24 a una tasa conservadora del 6%. Determine el valor de la compra de la isla de Manhattan en el año 2001 al a) 6% anual de interés simple y b) 6% anual de interés compuesto. Observe la diferencia significativa que tiene la composición a 6% durante un periodo de tiempo largo (en este caso, 375 años).
2. ¿Cuál es la cantidad equivalente que Nueva York habría tenido que desembolsar en 1626 y *cada año*

desde entonces, para igualar exactamente la cantidad en la parte 1. anterior, al 6% anual *compuesto* anualmente?

Acerca del programa de compra de acciones:

1. Construya el diagrama de flujo de efectivo para las edades desde 22 hasta 57.
2. El ingeniero ha aprendido que durante los 30 años de intervención, las acciones ganaron a una tasa de 1.25% por mes. Determine el valor de los \$50 por mes cuando el ingeniero dejó la compañía luego de un total de 60 compras.
3. Determine el valor de las acciones de la compañía que tiene el ingeniero a sus 57 años. De nueva cuenta, observe la diferencia significativa que 30 años han generado a un 15% anual de tasa compuesta.
4. Suponga que el ingeniero no deja los fondos invertidos en acciones a los 27 años de edad. Ahora determine la cantidad que habría tenido que depositar cada año, a partir de los 50 años de edad, para hacerlo equivalente al valor a la edad de 57, calculado en el punto 3. anterior. Suponga que los 7 años de depósito obtienen un retorno de 15% anual.
5. Finalmente, compare la cantidad total de dinero depositado durante los 5 años, cuando el ingeniero estaba en sus veinte, con la cantidad total que habría tenido que depositar durante los 7 años en sus cincuenta, para tener la cantidad igual y equivalente a los 57 años, como se determinó en el punto 3. anterior.